Revista de Investigación
Hatun Yachay Wasi 1(2), 94 - 108 (2022)
ISSN: 2955 - 8255

ARTICULO ORIGINAL

Recibido: Setiembre 2022
Aceptado: Diciembre 2022

BUENA COLOCACIÓN PARA UN SISTEMA TERMOELÁSTICO LINEAL CON CONDICIONES DE FRONTERA PERIÓDICAS

WELL-POSEDNESS FOR A LINEAR THERMOELASTIC SYSTEM WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

George J. Bautista [1] Oscar S. Fonseca[2] Víctor Martínez-León[3]

[1]Universidad Tecnológica de los Andes, Abancay, Perú.
[2]Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
[3]Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Brasil.

Correspondencia:
George J. Bautista
gbautistas@utea.edu.pe

Para citar este artículo. Bautista, G., Fonseca, O., & Martinez, V. (2022) buena colocación para un sistema termoelástico lineal con condiciones de frontera periódicas. *Revista de Investigación Hatun Yachay Wasi, 1*(2), 94 - 108. https://doi.org/10.57107/hyw.v1i2.27

RESUMEN

Este artículo se ocupa del estudio de las soluciones de un sistema termoelástico lineal. Se demostró que el problema de valor inicial está bien ubicado en los espacios de Sobolev periódicos $H_p^s(0,2\pi)\times H_p^s(0,2\pi)\times H_p^s(0,2\pi)$, para todo s ∈ R, en el sentido que establecemos teoremas de existencia y unicidad globales para este sistema. Además, la solución tiene una expansión con coeficientes de Fourier que decaen exponencialmente.

Palabras clave: Expansión de Fourier, sistema termoelástico lineal, teoría de semigrupos.

ABSTRACT

This article is concerned with the study of the solutions of a linear thermoelastic system. It is shown that the initial value problem is well-posed in periodic Sobolev spaces $H_p^s(0,2\pi)\times H_p^s(0,2\pi)\times H_p^s(0,2\pi)$, for all s ∈ R, in the sense that we establish global existence and uniqueness theorems for this system. Moreover, the solution has an expansion with exponentially decaying Fourier coefficients.

Keywords: Fourier expansive, linear thermoelastic system, semigroup theory.

INTRODUCCIÓN

Como es bien sabido, un sistema termoelástico describe el comportamiento de cuerpos elásticos y térmicos, en medios conductores de calor. En la teoría clásica, un sistema de elasticidad hiperbólica se acopla con el modelo clásico de conducción de calor, el cual está dado por la ley de Fourier, ver [1]: *la tasa de tiempo de transferencia de calor a través de un material es proporcional al gradiente negativo en la temperatura.*

Este estudio dio lugar a un sistema acoplado que, para un mejor entendimiento, primero nos tenemos que referir a la parte teórica de la elasticidad y comprender las ecuaciones que se derivan de ellas y, segundo, comprender el modelo parabólico en la teoría del calor.

Con respecto al estudio de estos sistemas, en [3], Dafermos estudia las ecuaciones lineales de termoelasticidad en n dimensiones, donde se muestra que las soluciones definen un semigrupo de contracciones en un espacio de Hilbert adecuado. Además, bajo algunas hipótesis de regularidad en los datos iniciales, se demuestra que estas soluciones decaen para cero, cuando el tiempo es suficientemente grande. Por otra parte, si se agrega un mecanismo de amortiguación en la ecuación, se tiene un decaimiento exponencial de las soluciones para estos sistemas, ver [8].

Aquí, se considera una variante del sistema de termoelasticidad no lineal unidimensional sujetas a condiciones de contorno de Dirichlet tanto para la diferencia de temperatura como para el desplazamiento, propuesto por R. Racke, Y. Shibata y S. Zheng en [11],

$$\begin{cases} u_{tt} - a(u_x,\theta)u_{xx} + b(u_x,\theta)\theta_x &= f, \\ c(u_x,\theta)\theta_t + b(u_x,\theta)u_{xt} - d(\theta,\theta_x)\theta_{xx} &= g. \end{cases} \tag{1}$$

En (1), si se tiene condiciones de frontera de tipo Neumann-Dirichlet ($u_x = v = 0$, en $[0,\infty]$) o condiciones de frontera Dirichlet-Neumann ($u = v_x = 0$, en $[0,\infty]$), en [12], Slemrod demostró la existencia global y la estabilidad asintótica de las soluciones.

Por otro lado, si las condiciones de frontera en (1) son de tipo Dirichlet-Dirichlet

$$u(t,0) = u(t,l) = \theta(t,0) = \theta(t,l) = 0, \tag{2}$$

en $[0,\infty]$, Racke y Shibata demostraron en [10] la existencia global de soluciones pequeñas, suficientemente regulares y, además, cuando $t \to \infty$, obtienen tasas de decaimiento polinomial, que dependen de la regularidad de los datos iniciales.

Con respecto al problema lineal asociado (1), es decir,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x &= 0, \\ \theta_t + \beta u_{xt} - \theta_{xx} &= 0, \end{cases} \tag{3}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha\beta > 0$, Muñoz Rivera demostró en [6] el decaimiento exponencial de soluciones al problema de valor inicial con frontera de tipo (2), utilizando el método de la energía.

En este trabajo, nuestro propósito es investigar estas cuestiones considerando al sistema termoelástico en un dominio periódico, cuando los términos no lineales en (1) son constantes. Más precisamente, consideramos el modelo

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma\theta_x = f, & t > 0,\ x \in (0, 2\pi) \\ \theta_t + \gamma u_{xt} - \beta\theta_{xx} = g, & t > 0,\ x \in (0, 2\pi), \end{cases} \tag{4}$$

donde $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$, con condiciones de contorno periódicas

$$\begin{cases} \partial_x^r u(t,0) = \partial_x^r u(t,2\pi), & t>0, \quad 0 \le r \le 1 \\ \partial_x^q \theta(t,0) = \partial_x^q \theta(t,2\pi), & t>0, \quad 0 \le q \le 1, \end{cases} \tag{5}$$

donde $r, q \in \mathbb{N}$, y condición inicial

$$\begin{cases} u(0,x) = u^0(x), & x \in (0,2\pi), \\ u_t(0,x) = u^1(x), & x \in (0,2\pi), \\ \theta(0,x) = \theta^0(x), & x \in (0,2\pi). \end{cases} \tag{6}$$

Nuestro objetivo principal es mostrar que, bajo algunas condiciones impuestas a los parámetros γ y β, el sistema (4)-(6) posee una única solución que depende continuamente de los datos iniciales.

La parte restante de este trabajo está organizada de la siguiente manera: en la sección 2, introducimos algunas notaciones y damos resultados preliminares que se utilizarán a lo largo del trabajo. En la sección 3 establecemos la buena colocación del sistema lineal donde, inicialmente, estudiamos el sistema homogéneo y, como consecuencia directa de la Teoría de Semigrupos, presentamos un resultado para el sistema no homogéneo (4)-(6). Finalmente, se darán las conclusiones respectivas y algunos problemas en abierto.

Preliminares

Primero introducimos algunas notaciones. Para cada $v \in L^2(0,2\pi)$ y $k \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\widehat{v}_k$ el $k-$coeficiente de Fourier de v,

$$\widehat{v}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x,$$

y, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos el espacio

$$H_p^m(0,2\pi) = \left\{ v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in L^2(0,2\pi) \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1+k^2)^m < \infty \right\}$$

el producto interior

$$(v,w)_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_k \overline{\widehat{w}_k}(1+k^2)^m. \tag{7}$$

La norma correspondiente a (7) es denotada por $\|\;\|_m$. Se puede ver que

$$H_p^m(0,2\pi) = \left\{ v \in H^m(0,2\pi) \;\middle|\; \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(0) = \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(2\pi),\ 0 \le r \le m-1 \right\},$$

donde $H^m(0,2\pi)$ representa el espacio clásico de Sobolev de exponente m en $(0,2\pi)$. Podemos extender la definición $H_p^m(0,2\pi)$ al caso $m = s \ge 0$, un número real no negativo, estableciendo

$$H_p^s(0,2\pi) = \left\{ v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in H^s(0,2\pi) \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1+k^2)^s < \infty \right\}. \tag{8}$$

Para cada número real no negativo s, $H_p^s(0,2\pi)$ también puede verse como un espacio de Hilbert con respecto al producto interior definido por (7)) con m sustituido por s. En particular, para cada $v \in H_p^s(0,2\pi)$,

$$\|v\|_s = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1+k^2)^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tal y como se indica en [5], para $s < 0$ definimos el espacio $H_p^s(0,2\pi)$ como el dual topológico de $H_p^{-s}(0,2\pi)$:

$$H_p^s(0,2\pi) = \left(H_p^{-s}(0,2\pi)\right)'.$$

El teorema de la representación de Riesz garantiza que cualquier $v \in H_p^0(0,2\pi) = L^2(0,2\pi)$ se puede identificar con un elemento $w_v \in \left(H_p^0(0,2\pi)\right)'$ tal que

$$w_v(z) = \int_0^{2\pi} z(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(z \in H_p^0(0,2\pi)\right).$$

Tradicionalmente, la misma notación se utiliza para v y w_v (los espacios $\left(H_p^0(0,2\pi)\right)'$ y $H_p^0(0,2\pi)$ son identificados).

Dado $s < 0$, cada elemento $w \in H_p^s(0,2\pi)$ puede expandirse de forma única de la siguiente manera

$$w = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{w}_k e^{ikx}, \tag{9}$$

donde $\widehat{w}_k = \frac{1}{2\pi} w\left(e^{-ikx}\right)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. El ligero abuso de notación en (9) (el elemento w del lado izquierdo no es una función de x y la función exponencial e^{ikx} en la derecha es en realidad el representante de esta función L^2 en el espacio dual) se compensa con el hecho de que la expansión (9) se parece exactamente a la correspondiente a un elemento en un espacio H^s con exponente positivo s. Por otro lado, el siguiente mapeo es un producto de dualidad entre $H_p^s(0, 2\pi)$ y $H_p^{-s}(0, 2\pi)$, para cada $s \geq 0$,

$$\langle v, w\rangle_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_k \widehat{w}_{-k}, \tag{10}$$

donde $v \in H_p^s(0, 2\pi)$, $w \in H_p^{-s}(0, 2\pi)$. Consecuentemente, si $s < 0$, el espacio $H_p^s(0, 2\pi)$ puede definirse también por (8) y puede verse como un espacio de Hilbert con respecto al producto interior (7) con m sustituido por s.

Por otro lado, sea el polinomio de grado 3 dado por $f(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$, donde $b, c, d \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$p = c - \frac{b^2}{3}, \quad q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}, \tag{11}$$

y

$$\begin{aligned} \triangle &= b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d + 18bcd - 27d^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2, \end{aligned} \tag{12}$$

el discriminante del polinomio f.

Los siguientes resultados, cuyas demostraciones se encuentran en [4], serán necesarios para nuestro estudio.

Teorema 1. *Sea $\triangle$ el discriminante de $f(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$, dado por (12).*

i) Si $\triangle > 0$, entonces f tiene tres raíces reales simples.

ii) Si $\triangle < 0$, entonces f tiene una raíz real simple, y dos raíces complejas conjugadas.

iii) Si $\triangle = 0$, entonces f tiene una raíz real doble y otra simple, o una raíz real triple.

Teorema 2. *Si el polimonio cúbico con coeficientes reales $f(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$ tiene discriminante $\triangle < 0$, entonces f posee una raíz real y dos complejas conjugadas dadas como:*

i) Si $p < 0$ y $q/2 < -|p/3|^{3/2}$, entonces las raíces están dadas por

$$-\frac{b}{3} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{-q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right) \tag{13}$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{b}{3} - \sqrt{\frac{-p}{3}} \Bigg[&\cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{-q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right) \\ &\pm\sqrt{3}i \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{-q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{14}$$

ii) Si $p < 0$ y $q/2 > |p/3|^{3/2}$, entonces las raíces son

$$-\frac{b}{3} - 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right) \tag{15}$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{b}{3} + \sqrt{\frac{-p}{3}} \Bigg[&\cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right) \\ &\pm\sqrt{3}i \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{16}$$

El sistema lineal. Buena colocación

El sistema homogéneo

El objetivo de esta sección es estudiar las principales propiedades del modelo linealizado.

Más precisamente, consideramos el sistema termoelástico (4)-(6), donde $f = g = 0$.

A lo largo de este trabajo, supondremos que los parámetros γ, β del sistema verifican las siguientes condiciones de signo:

$$\begin{cases} |\gamma| < \sqrt{\sqrt{108} - 10}, \\ \beta > \sqrt{3(\gamma^2 + 1)}. \end{cases} \tag{17}$$

En primer lugar, observemos que el sistema (4)-(6) puede escribirse en la siguiente forma vectorial

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}_t (t) = \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} (t), \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{18}$$

donde $v = u_t$ y $\mathcal{A}$ es el operador lineal no limitado definido por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \partial_x^2 & 0 & -\gamma\partial_x \\ 0 & -\gamma\partial_x & \beta\partial_x^2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Supongamos que los datos iniciales en (6) están dados por

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k^0 \\ \widehat{u}_k^1 \\ \widehat{\theta}_k^0 \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

Al menos formalmente, la solución de (4)-(6) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} (t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx},$$

donde $\begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$ satisface

$$\begin{cases} (\widehat{u}_k)_t(t) = \widehat{v}_k(t), \\ (\widehat{v}_k)_t(t) = -k^2\widehat{u}_k(t) - i\gamma k\widehat{\theta}_k(t), \\ (\widehat{\theta}_k)_t(t) = -i\gamma k\widehat{v}_k(t) - \beta k^2\widehat{\theta}_k(t), \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{u}_k^0, \quad \widehat{v}_k(0) = \widehat{u}_k^1, \quad \widehat{\theta}_k(0) = \widehat{\theta}_k^0, \end{cases} \tag{20}$$

para cada $t \in (0, T)$.

Sean $b = b(k)$, $c = c(k)$ y $d = d(k)$ definidos por

$$b = \beta k^2, \quad c = (\gamma^2 + 1)k^2, \quad d = \beta k^4. \tag{21}$$

Consideremos $p = p(k), q = q(k)$ y $\triangle = \triangle(k)$ dados por (11) y (12), respectivamente, con b, c, d satisfaciendo (21).

Se tiene el siguiente resultado.

Lema 1. *Para cada $k \in \mathbb{Z}^*$, sean*

$$\lambda_{1,k} = -\frac{b}{3} - 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right), \tag{22}$$

$$\lambda_{2,k}^{\pm} = -\frac{b}{3} + \sqrt{\frac{-p}{3}} \left[\cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right) \pm\sqrt{3}i \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right)\right], \tag{23}$$

donde b, c, d y p, q son dados por (21) y (11) respectivamente. Consideremos el siguiente operador diferencial lineal

$$L \equiv D^3 + bD^2 + cD + d.$$

Entonces, la solución $z(t) = z_k(t)$ de

$$\begin{cases} Lz(t) = 0, \\ z(0) = z'(0) = 0; \ z''(0) = 1, \end{cases} \tag{24}$$

es dada por

$$z_k(t) = C_k^1 e^{\lambda_{1,k}t} + C_k^{2,+} e^{\lambda_{2,k}^+ t} + C_k^{2,-} e^{\lambda_{2,k}^- t}, \tag{25}$$

donde C_k^1, $C_k^{2,+}$ y $C_k^{2,-}$ satisfacen

$$\begin{cases} C_k^1 = \Big((\lambda_{2,k}^+ - \lambda_{1,k})(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{1,k})\Big)^{-1}, \\ C_k^{2,+} = -\Big((\lambda_{2,k}^+ - \lambda_{1,k})(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{2,k}^+)\Big)^{-1}, \\ C_k^{2,-} = \Big((\lambda_{2,k}^- - \lambda_{1,k})(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{2,k}^+)\Big)^{-1}, \end{cases} \quad (26)$$

con $k \in \mathbb{Z}^*$.

Demostración. El polinomio característico asociado a la ecuación $z''' + bz'' + cz' + d = 0$ es definido por

$$f(\lambda) = \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d.$$

De (12) y (17), obtenemos

$$\begin{aligned} &\triangle(k) \\ &= \beta^2 k^8\left[(\gamma^2+10)^2 - 108\right] - 4k^6(\gamma^2+1)^3 - 4\beta^4 k^{10} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 1, $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz real simple y dos raíces complejas conjugadas.
Observe que, de (11) y (17), se tiene

$$p(k) = (\gamma^2+1)^2 k^2 - \frac{\beta^2 k^4}{3} < k^2\left[(\gamma^2+1) - \frac{\beta^2}{3}\right] < 0,$$

y

$$\frac{q(k)}{2} = \mathcal{O}(k^6) + \mathcal{O}(k^4); \qquad \left(\frac{-p(k)}{3}\right)^{3/2} = \mathcal{O}(k^6).$$

Luego, del Teorema 2, la raíz real $\lambda_{1,k}$ y las dos raíces complejas conjugadas $\lambda_{2,k}^{\pm}$ de f están dadas por (22) y (23), en los respectivos casos. Consecuentemente, la solución general de (24) verifica

$$z_k(t) = C^1 e^{\lambda_{1,k} t} + C^{2,+} e^{\lambda_{2,k}^+ t} + C^{2,-} e^{\lambda_{2,k}^- t}.$$

Además, de la condición inicial, deducimos que

$$\begin{cases} 0 = z_k(0) = C^1 + C^{2,+} + C^{2,-}, \\ 0 = z_k'(0) = \lambda_{1,k} C^1 + \lambda_{2,k}^+ C^{2,+} + \lambda_{2,k}^- C^{2,-}, \\ 1 = z_k''(0) = (\lambda_{1,k})^2 C^1 + (\lambda_{2,k}^+)^2 C^{2,+} + (\lambda_{2,k}^-)^2 C^{2,-}. \end{cases}$$

Por lo tanto, dado que

$$\begin{aligned} \triangle_2(k) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_{1,k} & \lambda_{2,k}^+ & \lambda_{2,k}^- \\ (\lambda_{1,k})^2 & (\lambda_{2,k}^+)^2 & (\lambda_{2,k}^-)^2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_{2,k}^+ - \lambda_{1,k})(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{1,k})(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{2,k}^+) \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle_{C^1}(k) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_{2,k}^+ & \lambda_{2,k}^- \\ 1 & (\lambda_{2,k}^+)^2 & (\lambda_{2,k}^-)^2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_{2,k}^- - \lambda_{2,k}^+) \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle_{C^{2,+}}(k) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_{1,k} & 0 & \lambda_{2,k}^- \\ (\lambda_{1,k})^2 & 1 & (\lambda_{2,k}^-)^2 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{1,k}) \neq 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \triangle_{C^{2,-}}(k) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_{1,k} & \lambda_{2,k}^+ & 0 \\ (\lambda_{1,k})^2 & (\lambda_{2,k}^+)^2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_{2,k}^+ - \lambda_{1,k}) \neq 0, \end{aligned}$$

la solución de (24) viene dada por (25), donde C_k^1, $C_k^{2,+}$ y $C_k^{2,-}$ satisfacen (26).

□

Lema 2. *La solución $\begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$ de (20) es dada por*

$$\begin{cases} \widehat{u}_k(t) &= \widehat{u}_k^0 q_k^0(t) + \widehat{u}_k^1 q_k^1(t) \\ &\quad - \left(k^2\widehat{u}_k^0 + i\gamma k\widehat{\theta}_k^0\right) q_k^2(t), \\ \widehat{v}_k(t) &= \widehat{u}_k^1 q_k^0(t) \\ &\quad - \left(k^2\widehat{u}_k^0 + i\gamma k\widehat{\theta}_k^0\right) q_k^1(t) \\ &\quad + \left(i\gamma\beta k^3\widehat{\theta}_k^0 - k^2(\gamma^2+1)\widehat{u}_k^1\right) q_k^2(t), \\ \widehat{\theta}_k(t) &= \widehat{\theta}_k^0 q_k^0(t) - \left(i\gamma k\widehat{u}_k^1 + \beta k^2\widehat{\theta}_k^0\right) q_k^1(t) \\ &\quad + \left(i\gamma k^3\widehat{u}_k^0 + i\gamma\beta k^3\widehat{u}_k^1\right) q_k^2(t) \\ &\quad + \left(k^2(\beta^2k^2 - \gamma^2)\widehat{\theta}_k^0\right) q_k^2(t), \end{cases} \quad (27)$$

donde los coeficientes $(q_k^0(t), q_k^1(t), q_k^2(t))$ *verifican*

$$\begin{cases} q_k^0(t) = k^2(\gamma^2+1)z_k(t) + \beta k^2 z_k'(t) + z_k''(t), \\ \\ q_k^1(t) = \beta k^2 z_k(t) + z_k'(t), \\ \\ q_k^2(t) = z_k(t), \end{cases} \tag{28}$$

y $z_k(t)$ *satisface* (25).

Demostración. El sistema (20) es equivalente a

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k \\ \widehat{v}_k \\ \widehat{\theta}_k \end{pmatrix}_t (t) = A(k) \begin{pmatrix} \widehat{u}_k \\ \widehat{v}_k \\ \widehat{\theta}_k \end{pmatrix} (t), \\ \\ \begin{pmatrix} \widehat{u}_k \\ \widehat{v}_k \\ \widehat{\theta}_k \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} \widehat{u}_k^0 \\ \widehat{u}_k^1 \\ \widehat{\theta}_k^0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

donde

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k^2 & 0 & -i\gamma k \\ 0 & -i\gamma k & -\beta k^2 \end{pmatrix}.$$

Luego, la solución de (20) es dada por

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}_k \\ \widehat{v}_k \\ \widehat{\theta}_k \end{pmatrix} (t) = e^{tA(k)} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k^0 \\ \widehat{u}_k^1 \\ \widehat{\theta}_k^0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Definimos las matrices $\mathcal{Z}(t)$ y $\mathcal{C}(k)$ como

$$\mathcal{Z}(t) = \begin{pmatrix} z_k(t) \\ z_k'(t) \\ z_k''(t) \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{C}(k) = \begin{pmatrix} k^2(\gamma^2+1) & \beta k^2 & 1 \\ \beta k^2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Por otro lado, sea $\mathcal{Q}_k(t) = (q_k^0(t), q_k^1(t), q_k^2(t))^T$ tal que

$$\mathcal{Q}_k(t) = \mathcal{C}(k)\mathcal{Z}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} k^2(\gamma^2+1)z_k(t) + \beta k^2 z_k'(t) + z_k''(t) \\ \\ \beta k^2 z_k(t) + z_k'(t) \\ \\ z_k(t) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, del Algoritmo de Putzer (ver [9]), se deduce que

$$\begin{aligned} e^{tA(k)} &= \sum_{j=0}^{2} q_k^j(t)\,(A(k))^j \\ &= \begin{pmatrix} A_1(k) & A_2(k) & A_3(k) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

donde

$$A_1(k) = \begin{pmatrix} q_k^0(t) - k^2 q_k^2(t) \\ \\ -k^2 q_k^1(t) \\ \\ i\gamma k^3 q_k^2(t) \end{pmatrix},$$

$$A_2(k) = \begin{pmatrix} q_k^1(t) \\ \\ q_k^0(t) - k^2(\gamma^2+1)q_k^2(t) \\ \\ -i\gamma k q_k^1(t) + i\beta\gamma k^3 q_k^2(t) \end{pmatrix},$$

y

$$A_3(k) = \begin{pmatrix} -i\gamma k q_k^2(t) \\ \\ -i\gamma k q_k^1(t) + i\beta\gamma k^3 q_k^2(t) \\ \\ q_k^0(t) - \beta k^2 q_k^1(t) + k^2(\beta^2 k^2 - \gamma^2) q_k^2(t) \end{pmatrix}.$$

Así, de (29) y (30) se tiene que la solución de (20) es determinada por (27). □

Observación 1. *En primer lugar, siendo* $\zeta(k) = \dfrac{(q(k)/2)}{(-p(k)/3)^{3/2}} > 1$, *observamos que*

$$\operatorname{arccosh}\zeta(k) = \ln\left(\zeta(k) + \sqrt{(\zeta(k))^2 - 1}\right)$$

y como $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta(k) = 1$, *se cumple lo siguiente:*

- $\lim\limits_{k\to\infty} \cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right) = 1.$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right) = 0.$

Analicemos más detenidamente los valores propios $\lambda_{1,k}$ y $\lambda_{2,k}^{\pm}$ dados por (22) y (23) respectivamente. En la secuencia, l, M y C denotan una constante positiva genérica que puede cambiar de una línea a otra.

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. *Existen constantes positivas $l > 0$ y $M > 0$, tales que*

$$\lambda_{1,k} \le -lk^2, \tag{31}$$

y

$$\Re(\lambda_{2,k}^{\pm}) \le -M, \tag{32}$$

donde $\Re(z)$ denota la parte real de $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. De la relación (11), se tiene que $\sqrt{\frac{-p(k)}{3}} \sim \frac{\beta k^2}{3}$. Por lo tanto, de la identidad (22), se deduce que

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k} &\sim -\frac{\beta k^2}{3} - \frac{2\beta k^2}{3}\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\\ &\le -\frac{\beta k^2}{3} \le -lk^2.\end{aligned}$$

De manera similar, de (23) y la Observación 1, obtenemos

$$\begin{aligned}\Re(\lambda_{2,k}^{\pm}) &\sim -\frac{b}{3} + \sqrt{\frac{-p(k)}{3}} = -\frac{b}{3}\left(1 - \sqrt{1-\frac{3c}{b^2}}\right)\\ &= \frac{-\frac{c}{b}}{1+\sqrt{1-\frac{3c}{b^2}}} < -\frac{c}{2b} = -M,\end{aligned}$$

con $M = \dfrac{(\gamma^2+1)}{2\beta} > 0.$

□

Los siguientes pasos están dedicados a analizar cuidadosamente los coeficientes dados por (26).

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2. *Sean C_k^1, $C_k^{2,+}$ y $C_k^{2,-}$ dados por (26). Entonces,*

$$|C_k^1| \le \mathcal{O}(k^{-4}), \tag{33}$$

y

$$|C_k^{2,+} + C_k^{2,-}| \le \mathcal{O}(k^{-4}). \tag{34}$$

Demostración. En efecto, de la Observación 1, existe una constante $M > 0$, tal que

$$\begin{cases}\left|\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\right|^{-1} \le M,\\ \\ \left|\left(\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\right)\right| \le M.\end{cases} \tag{35}$$

Siendo

$$\begin{aligned}\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{1,k} = \sqrt{\frac{-p(k)}{3}}\Bigg[&3\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\\ &+ \sqrt{3}i\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\Bigg],\end{aligned}$$

de (26) y (35), obtenemos

$$\begin{aligned}|C_k^1| &= |\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{1,k}|^{-2}\\ &= \left(\frac{-p(k)}{3}\left[9\left|\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\right|^2\right.\right.\\ &\quad \left.\left.+\ 3\left|\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\right|^2\right]\right)^{-1}\\ &\le \left(\frac{-p(k)}{3}9\left|\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\right|^2\right)^{-1}\\ &\sim \beta^{-1}k^{-4}\left(\left|\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arccosh}\zeta(k)\right)\right|^2\right)^{-1}\\ &\le Mk^{-4} = \mathcal{O}(k^{-4}).\end{aligned}$$

Por otro lado, de (26), deducimos que

$$C_k^{2,+} + C_k^{2,-} = -C_k^1.$$

De la identidad anterior y la estimativa (33), resulta (34). □

Observación 2. *De hecho, se puede decir mucho más sobre los valores propios $\lambda_{1,k}$ y $\lambda_{2,k}^{\pm}$. De (22), (23) y la Observación 1, existe una constante positiva C, tal que*

$$|\lambda_{1,k}|,\ |\lambda_{2,k}^{\pm}| \le Ck^2. \tag{36}$$

Además, de (22), (23) y como consecuencia directa de la Proposición 1, se tienen las siguientes estimativas:

$$\lambda_{1,k} \le \Re(\lambda_{2,k}^{\pm}) \le -M, \quad \frac{1}{|\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})|} \le M, \tag{37}$$

para alguna constante positiva M.

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3. *Para cada $t \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}^*$, existe una constante positiva $M > 0$, tal que la solución $z_k(t)$ de (24) verifica las siguientes desigualdades:*

$$\begin{cases} |z_k(t)| \le \mathcal{O}(k^{-4})e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}, \\ \\ |z_k'(t)| \le \mathcal{O}(k^{-2})e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}, \\ \\ |z_k''(t)| \le Me^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}. \end{cases} \tag{38}$$

Demostración. De (25), deducimos que

$$\begin{aligned} z_k(t) = C_k^1 e^{\lambda_{1,k}t} + \left(C_k^{2,+} + C_k^{2,-}\right) e^{\lambda_{2,k}^{+}t} \\ - C_k^{2,-}\left(e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Afirmamos que existe una constante positiva $M > 0$, tal que

$$\left|C_k^{2,-}\left(e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}\right)\right| \le \frac{M}{k^2}e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}. \tag{40}$$

Supongamos que se ha demostrado la afirmación. Entonces, a partir de la Proposición 2, combinando (37), (39) y (40), obtenemos

$$\begin{aligned} &|z_k(t)| \\ &\le \left|C_k^1 e^{\lambda_{1,k}t}\right| + \left|\left(C_k^{2,+} + C_k^{2,-}\right) e^{\lambda_{2,k}^{+}t}\right| \\ &+ \left|C_k^{2,-}\left(e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}\right)\right| \\ &\le \mathcal{O}(k^{-4})e^{\lambda_{1,k}t} + \mathcal{O}(k^{-4})\left|e^{\lambda_{2,k}^{+}t}\right| \\ &+ \mathcal{O}(k^{-2})e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})} \\ &\le \mathcal{O}(k^{-4})e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})} + \mathcal{O}(k^{-2})e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})} \\ &\le \mathcal{O}(k^{-2})e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}, \end{aligned}$$

lo que implica la primera desigualdad de (38).

Ahora, vamos a probar la afirmación (40). Puesto que $\lim_{k\to\infty}\left(\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{2,k}^{-}\right) = 0$, existe una constante positiva M, tal que

$$|e^{\left(\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{2,k}^{-}\right)t} - 1| \le M|\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{2,k}^{-}|t. \tag{41}$$

Luego, de (41) se tiene que

$$\left|\frac{e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}}{|\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{2,k}^{-}|}\right| \le Mte^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}, \tag{42}$$

donde M es una constante positiva. De la regla de L'Hôpital, resulta

$$\left|te^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}\right| \sim \frac{e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}}{|\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})|}.$$

Así, de (42) y (37), obtenemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}}{|\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{2,k}^{-}|}\right| &\le M\frac{e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}}{|\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})|} \\ &\le Me^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}. \end{aligned} \tag{43}$$

Por lo tanto, de (33) y (43), se tiene la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned} \left|C_k^{2,-}\left(e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}\right)\right| &= \left|C_k^1\right|^{1/2}\left|\frac{e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}}{|\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{2,k}^{-}|}\right| \\ &\le \frac{M}{k^2}e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})}, \end{aligned}$$

para alguna constante $M > 0$.

Por otro lado, para la segunda desigualdad de (38), observamos que

$$\begin{aligned} z_k'(t) =& C_k^1\lambda_{1,k}e^{\lambda_{1,k}t} + \left(C_k^{2,+} + C_k^{2,-}\right)\lambda_{2,k}^{+}e^{\lambda_{2,k}^{+}t} \\ &- \lambda_{2,k}^{-}C_k^{2,-}\left(e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}\right) \\ &- C_k^{2,-}\left(\lambda_{2,k}^{+} - \lambda_{2,k}^{-}\right)e^{\lambda_{2,k}^{+}t}. \end{aligned} \tag{44}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |z_k'(t)| \le& \left|C_k^1\right||\lambda_{1,k}|e^{\lambda_{1,k}t} \\ &+ \left|C_k^{2,+} + C_k^{2,-}\right|\left|\lambda_{2,k}^{+}\right|\left|e^{\lambda_{2,k}^{+}t}\right| \\ &+ \left|\lambda_{2,k}^{-}\right|\left|C_k^{2,-}\left(e^{\lambda_{2,k}^{+}t} - e^{\lambda_{2,k}^{-}t}\right)\right| \\ &+ \left|\lambda_{2,k}^{-} - \lambda_{1,k}\right|^{-1}\left|e^{\lambda_{2,k}^{+}t}\right|. \end{aligned}$$

De la última estimativa, combinando la Proposición 2, con (37), (39) y (40), obtenemos

$$\begin{aligned} |z_k'(t)| &\le \mathcal{O}(k^{-4})\mathcal{O}(k^2)e^{\lambda_{1,k}t} + \mathcal{O}(k^{-4})\mathcal{O}(k^2)e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})} \\ &+ \mathcal{O}(k^2)\mathcal{O}(k^{-2})e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})} + \left|C_k^1\right|^{1/2}e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})} \\ &\le \left(M + \mathcal{O}(k^{-2})\right)e^{t\Re(\lambda_{2,k}^{\pm})} \end{aligned}$$

Finalmente, siendo

$$\begin{aligned} z_k''(t) &= C_k^1 (\lambda_{1,k})^2 e^{\lambda_{1,k} t} \\ &+ \left(C_k^{2,+} + C_k^{2,-}\right) \left(\lambda_{2,k}^+\right)^2 e^{\lambda_{2,k}^+ t} \\ &+ \left(\lambda_{2,k}^-\right)^2 C_k^{2,-} \left(e^{\lambda_{2,k}^- t} - e^{\lambda_{2,k}^+ t}\right) \\ &+ \frac{2\Re(\lambda_{2,k}^\pm)}{\lambda_{2,k}^- - \lambda_{1,k}} e^{\lambda_{2,k}^+ t}, \end{aligned}$$

de todo lo anterior, se deduce que

$$\begin{aligned} |z_k''(t)| &\leq \mathcal{O}(k^{-4})\mathcal{O}(k^4) e^{\lambda_{1,k} t} \\ &+ \mathcal{O}(k^{-4})\mathcal{O}(k^4) e^{t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)} \\ &+ \mathcal{O}(k^{-4})\mathcal{O}(k^2) e^{t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)} \\ &+ \mathcal{O}(k^{2})\mathcal{O}(k^{-2}) e^{t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)} \\ &\leq \left(M + \mathcal{O}(k^{-2})\right) e^{t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)}. \end{aligned}$$

□

Resultados principales

A continuación, enunciaremos los teoremas principales del presente trabajo.

Se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 4. *Para cada $t \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ existe una constante positiva $M > 0$, tal que la solución* $\begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$ *de (20) verifica la siguiente estimativa,*

$$\begin{aligned} &|\widehat{u}_k(t)|^2 + |\widehat{v}_k(t)|^2 + |\widehat{\theta}_k(t)|^2 \\ &\leq M \left(|\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2\right) e^{2t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)}. \end{aligned} \tag{45}$$

Demostración. De (27), (28) y la estimativa (38), obtenemos

$$\begin{aligned} &|\widehat{u}_k(t)| \\ &= \left|\widehat{u}_k^0 q_k^0(t) + \widehat{u}_k^1 q_k^1(t) - \left(k^2 \widehat{u}_k^0 + i\gamma k \widehat{\theta}_k^0\right) q_k^2(t)\right| \\ &\leq |\widehat{u}_k^0||q_k^0(t)| + |\widehat{u}_k^1||q_k^1(t)| \\ &+ \left(k^2|\widehat{u}_k^0| + |\gamma||k||\widehat{\theta}_k^0|\right) |q_k^2(t)| \\ &\leq |\widehat{u}_k^0| \left(k^2(\gamma^2+1)|z_k(t)| + \beta k^2 |z_k'(t)| + |z_k''(t)|\right) \\ &+ |\widehat{u}_k^1| \left(\beta k^2 |z_k(t)| + |z_k'(t)|\right) \\ &+ \left(k^2|\widehat{u}_k^0| + |\gamma||k||\widehat{\theta}_k^0|\right) |z_k(t)| \\ &\leq M \left(|\widehat{u}_k^0| + |\widehat{u}_k^1| + |\widehat{\theta}_k^0|\right) e^{t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)}. \end{aligned}$$

Luego,

$$|\widehat{u}_k(t)|^2 \leq M \left(|\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2\right) e^{2t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)}. \tag{46}$$

Análogamente, de (27), (28) y (38), se tiene que

$$|\widehat{v}_k(t)|^2 \leq M \left(|\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2\right) e^{2t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)}, \tag{47}$$

y

$$|\widehat{\theta}_k|^2 \leq M \left(|\widehat{u}_k^0| + |\widehat{u}_k^1| + |\widehat{\theta}_k^0|\right) e^{2t\Re(\lambda_{2,k}^\pm)}, \tag{48}$$

con $t \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sumamos las desigualdades resultantes (46), (47), (48) , lado a lado y obtenemos (45). □

Para cada $s \in \mathbb{R}$, definimos el espacio

$$V^s = H_p^s(0,2\pi) \times H_p^s(0,2\pi) \times H_p^s(0,2\pi), \tag{49}$$

dotado del producto interior definido por

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \right\rangle_{V^s} \\ &= (f_1, g_1)_s + (f_2, g_2)_s + (f_3, g_3) . \end{aligned}$$

El siguiente resultado nos proporciona un semigrupo asociado a nuestro problema lineal homogéneo.

Teorema 5. *Dado $s \in \mathbb{R}$, para cada* $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}$ *en V^s, la familia de operadores lineales $(S(t))_{t\geq 0}$ definidos por*

$$S(t)\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx}, \tag{50}$$

donde los coeficientes $\begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$ *están dado por (27), es un semigrupo en V^s y verifica la siguiente estimativa,*

$$\left\| S(t)\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s} \leq M \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}, \tag{51}$$

donde M es una constante positiva.

Demostración. Por el Teorema 4, existe una constante $M > 0$, tal que

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx} \right\|_{V^s}^2$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|\widehat{u}_k(t)|^2 + |\widehat{v}_k(t)|^2 + |\widehat{\theta}_k(t)|^2 \right) (1+k^2)^s$$

$$\leq M^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2 \right) (1+k^2)^s$$

$$= M^2 \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}^2 .$$

Entonces, $(S(t))_{t\geq 0}$ es un operador lineal, continuo, bien definido y satisface (51). Es fácil comprobar que $S(0) = I$, $S(t_1) \circ S(t_2) = S(t_1 + t_2)$ para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ y, además, de (27) y el análisis desarrollado en el Teorema 4, se obtiene que

$$\left\| S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}^2$$

$$\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Psi_k(t) \left(|\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2 \right) (1+k^2)^s .$$

donde

$$\Psi_k(t) = \text{máx}\left\{ \left|q_k^0(t) - 1\right|, \left|k^2 q_k^1(t)\right|, \left|k^4 q_k^2(t)\right| \right\}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to 0} S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix},$$

en V^s y la prueba está completa.

□

Teorema 6. *El generador infinitesimal del semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ es un operador limitado $(D(A), A)$, donde $D(A) = V^{s+2}$ y A es dado por* (19).

Demostración. Vamos a demostrar que

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}}{t} = A \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

si y sólo si $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \in V^{s+2}$.

Esto equivale a mostrar que la derivada en cero de la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx}$, donde los coeficientes $\begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$ satisfacen (27), es convergente a $A \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}$ en V^s si y sólo si $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \in V^{s+2}$.

Si denotamos por

$$\mathcal{S}_N(t) = \sum_{|k|\leq N} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx},$$

una suma parcial de la serie, un cálculo sencillo que toma en cuenta (20) muestra que

$$\left[\mathcal{S}_N\right]_t (0) = A\left(\mathcal{S}_N\right)(0). \tag{53}$$

Sea $(D(B), B)$ el generador infinitesimal del semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$. Si $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \in D(B)$, de (53) se tiene que

$$B\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}=\lim_{t\to0}\frac{S(t)\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}}{t}$$
$$=\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\begin{pmatrix}\widehat{u}_k(t)\\\widehat{v}_k(t)\\\widehat{\theta}_k(t)\end{pmatrix}e^{ikx}\right]_t(0)$$
$$=\lim_{N\to\infty}[\mathcal{S}_N]_t(0)=\lim_{N\to\infty}A(\mathcal{S}_N)(0)$$
$$=A\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}. \tag{54}$$

Así, $\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}\in D(A)=V^{s+2}$ y

$$B\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix},$$

para cada $\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}\in D(B)$. Por otra parte, sea $\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}\in D(A)=V^{s+2}$. Debemos demostrar que la serie $\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\begin{pmatrix}\widehat{u}_k(t)\\\widehat{v}_k(t)\\\widehat{\theta}_k(t)\end{pmatrix}e^{ikx}\right]_t(0)$ es convergente. Esto es equivalente a mostrar que

$$[\mathcal{S}_N]_t(0)=\left[\sum_{|k|\le N}\begin{pmatrix}\widehat{u}_k(t)\\\widehat{v}_k(t)\\\widehat{\theta}_k(t)\end{pmatrix}e^{ikx}\right]_t(0)$$

es una secuencia de Cauchy. En efecto,

$$\begin{aligned}&\|[\mathcal{S}_{N+p}]_t(0)-[\mathcal{S}_N]_t(0)\|^2_{V^s}\\&=\sum_{N\le|k|\le N+p}\left(|\widehat{u}_{k,t}(0)|^2\right)(1+k^2)^s\\&+\sum_{N\le|k|\le N+p}\left(|\widehat{v}_{k,t}(0)|^2\right)(1+k^2)^s\\&+\sum_{N\le|k|\le N+p}\left(|\widehat{\theta}_{k,t}(0)|^2\right)(1+k^2)^s.\end{aligned}\tag{55}$$

De (20) se deduce que

$$|\widehat{u}_{k,t}(0)|^2=|\widehat{v}_k(0)|=|\widehat{u}_k^1|^2, \tag{56}$$

$$\begin{aligned}|\widehat{v}_{k,t}(0)|^2&=|k^2\widehat{u}_k(0)+i\gamma k\widehat{\theta}_k(0)|^2\\&=|k^2\widehat{u}_k^0+i\gamma k\widehat{\theta}_k^0|^2\\&\le Mk^4\left(|\widehat{u}_k^0|^2+|\widehat{\theta}_k^0|^2\right),\end{aligned}\tag{57}$$

y

$$\begin{aligned}|\widehat{\theta}_{k,t}(0)|^2&=|i\gamma k\widehat{v}_k(0)+\beta k^2\widehat{\theta}_k(0)|^2\\&=|i\gamma k\widehat{u}_k^1+k^2\widehat{\theta}_k^0|^2\\&\le Mk^4\left(|\widehat{u}_k^1|^2+|\widehat{\theta}_k^0|^2\right),\end{aligned}\tag{58}$$

donde M es una constante positiva que sólo depende de γ y β. Entonces, de (56), (57) y (58), se tiene que

$$\begin{aligned}&|\widehat{u}_{k,t}(0)|^2+|\widehat{v}_{k,t}(0)|^2+|\widehat{\theta}_{k,t}(0)|^2\\&\le Mk^4\left(\widehat{u}_k^0+|\widehat{u}_k^1|^2+|\widehat{\theta}_k^0|^2\right).\end{aligned}\tag{59}$$

En consecuencia, de (55) y (59), obtenemos la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned}&\|[\mathcal{S}_{N+p}]_t(0)-[\mathcal{S}_N]_t(0)\|^2_{V^s}\\&\le M\sum_{N\le|k|\le N+p}k^4\left(\widehat{u}_k^0+|\widehat{u}_k^1|^2+|\widehat{\theta}_k^0|^2\right)(1+k^2)^s\\&\le M\sum_{N\le|k|\le N+p}\left(\widehat{u}_k^0+|\widehat{u}_k^1|^2+|\widehat{\theta}_k^0|^2\right)(1+k^2)^{s+2},\end{aligned}\tag{60}$$

y como $\begin{pmatrix}u^0\\u^1\\\theta^0\end{pmatrix}\in D(A)=V^{s+2}$, de (60), se tiene que

$$[\mathcal{S}_N]_t(0)=\left[\sum_{|k|\le N}\begin{pmatrix}\widehat{u}_k(t)\\\widehat{v}_k(t)\\\widehat{\theta}_k(t)\end{pmatrix}e^{ikx}\right]_t(0)$$

es una secuencia de Cauchy. Luego,

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} &= \lim_{N\to\infty} A\left(\mathcal{S}_N\right)(0) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\mathcal{S}_N\right]_t(0) \\
&= \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx}\right]_t (0) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{S(t)\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}}{t} \\
&= B\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

De este modo, $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \in D(B)$ y

$$
A\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix},
$$

para cada $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \in D(A) = V^{s+2}$.

$\square$

El sistema no homogéneo

Como consecuencia directa de los Teoremas 5-6 y de la Teoría General de las Ecuaciones de Evolución(véase, por ejemplo, [2, 7]), tenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad:

Teorema 7. *Sea $T > 0$ y $s \in \mathbb{R}$. Para cada $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \in V^s$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in L^1\left(0,T;V^s\right)$, existe una única solución*

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in C^1\left([0,T];V^{s-2}\right) \cap C\left([0,T];V^s\right)
$$

del sistema

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}_t (t) = A\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix},
\end{cases}
$$

que verifica la fórmula de variación de las constantes,

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}(t) = S(t)\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s)\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}(s)\,ds.
$$

Además, existe una constante positiva $C > 0$, que depende sólo de s, tal que

$$
\begin{aligned}
&\left\|\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}\right\|_{C([0,T];V^s)} \\
&\leq C\left(\left\|\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}\right\|_{L^1(0,T;V^s)} + \left\|\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}\right\|_{V^s}\right).
\end{aligned}
$$

CONCLUSIONES

En este trabajo se demostró un resultado de buena colocación global para un sistema termoelástico lineal homogéneo, el cual depende de algunos parámetros y, como una consecuencia inmediata de la teoría de semigrupos, se obtuvo la buena colocación para el sistema lineal no homogéneo. Se estudiaron propiedades espectrales necesarias, para obtener la solución del sistema como una expansión en series de Fourier.

Hay algunas cuestiones interesantes que surgen de este trabajo y que merecen un estudio más profundo:

- En nuestro enfoque, se eligieron los parámetros γ y β satisfaciendo la condición (17). Una pregunta natural sería si se pudieran obtener los mismos resultados para los parámetros γ y β de modo general.
- Además, como consecuencia del Teorema 4, es probable que la solución de nuestro sistema tenga un comportamiento asíntótico que tienda para cero, cuando $t \to \infty$.
- Con respecto al sistema no lineal con condiciones de frontera periódicas, se necesitaría de un análisis más agudo y de condiciones adicionales para los términos no lineales del sistema, con la finalidad de obtener la buena colocación y la estabilidad exponencial de las soluciones.
- Todo lo mencionado anteriormente será objeto de un futuro estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carlson, D. (1972). *Linear thermoelasticity*, In: Truesdell CA, ed. Handbuch Der Physik, Vol. VIa/2. Berlin: Springer; 297-3456 https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_2

Cazenave, T., & Haraux, A. (1998). *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

Dafermos, C. (1968). On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis, 29*, 241-271. https://doi.org/10.1007/BF00276727

Janson, S. (2010). Roots of Polynomials of Degrees 3 and 4, arXiv:1009.2373. https://doi.org/10.48550/arXiv.1009.2373

Micu, S. & Pazoto, A. (2017). Stabilization of a Boussinesq system with generalized damping. *Systems & Control Letters, 105*, 62-69. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2017.04.012

Muñoz, J. (1992). Energy decay rates in linear thermoelasticity, *Funkcialaj Ekvacioj, 35*, 19-30.http://www.im.ufrj.br/~rivera/Art_Pub/funkcTer.pdf

Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag: New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

Pereira, D. & Menzala, G.(1989). Exponential decay of solutions to a coupled system of equations of linear thermoelasticity. *Computational & Applied Mathematics, 8*, 193-204. https://books.google.com.pe/

Putzer, E. (1966). Avoiding the Jordan canonical form in the discusión of linear systems with constant coefficients. *The American Mathematical Monthly*, 73: 1, 2-7. https://doi.org/10.1080/00029890.1966.11970714

Racke, R. & Shibata, Y. (1991). Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis, 116*, 1-34. https://doi.org/10.1007/BF00375601

Racke, R., Shibata, Y. & Zheng, S. (1993). Global solvability and exponential stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. *Quarterly of Applied Mathematics, 51*(4) , 751–763. http://www.jstor.org/stable/43637959

Slemrod, M. (1981). Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *76*, 97-133. https://doi.org/10.1007/BF00251248