


## COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO PARA UN SISTEMA TERMOELÁSTICO LINEAL

### ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A LINEAR THERMOELASTIC SYSTEM

George J. Bautista <sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Universidad Tecnológica de los Andes-Abancay-Perú

#### Correspondencia:

George J. Bautista  
gbautistas@utea.edu.pe

Para citar este artículo: Bautista, G.(2023). Comportamiento

asintótico para un sistema termoelástico lineal. *Hatun Yachay Wasi*,  
2(1), 79 - 88. <https://doi.org/10.57107/hyw.v2i1.37>

#### RESUMEN

En este artículo se muestra una extensión de los resultados obtenidos de Bautista et al. (2022), para el sistema termoelástico lineal. Se demostró que la energía asociada al problema del valor inicial es decreciente en el tiempo. Además, se mostró que la solución decae exponencialmente a cero en los espacios de Sobolev periódicos:

$$H_p^s(0, 2\pi) \times H_p^s(0, 2\pi) \times H_p^s(0, 2\pi), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

**Palabras clave:** decaimiento exponencial, estabilización, sistema termoelástico lineal, teoría de semigrupos

#### ABSTRACT

This article shows an extension of the results obtained from Bautista et al. (2022), for the linear thermoelastic system. It appears that the energy associated with the initial value problem is decreasing in time. Furthermore, it was shown that the solution decays exponentially to zero in periodic Sobolev spaces:

$$H_p^s(0, 2\pi) \times H_p^s(0, 2\pi) \times H_p^s(0, 2\pi), \text{ for all } s \in \mathbb{R}.$$

**Keywords:** exponential decay, stabilization, linear thermoelastic system, semigroup theory



## INTRODUCCIÓN

En este trabajo, estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones de una variante del sistema de termoelástico no lineal unidimensional (Racke et al., 1993),

$$\begin{cases} u_{tt} - a(u_x, \theta)u_{xx} + b(u_x, \theta)\theta_x & = f, \\ c(u_x, \theta)\theta_t + b(u_x, \theta)u_{xt} - d(\theta, \theta_x)\theta_{xx} & = g. \end{cases} \quad (1)$$

Se demuestra la estabilidad asintótica de las soluciones de (1) (Slemrod, 1981), cuando se tiene condiciones de frontera de tipo Neumann-Dirichlet ( $u_x = v = 0$ , en  $[0, \infty]$ ) o condiciones de frontera Dirichlet-Neumann ( $u = v_x = 0$ , en  $[0, \infty]$ ).

Además, si las condiciones de frontera en (1) son de tipo Dirichlet-Dirichlet

$$u(t, 0) = u(t, l) = \theta(t, 0) = \theta(t, l) = 0, \quad (2)$$

en  $[0, \infty]$ , obtienen, tasas de decaimiento polinomial, cuando  $t \rightarrow \infty$ , que dependen de la regularidad de los datos iniciales (Racke & Shibata, 1991).

Por otra parte, si se considera el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x & = 0, \\ \theta_t + \beta u_{xt} - \theta_{xx} & = 0, \end{cases} \quad (3)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha\beta > 0$ , usando el método de la energía, se muestra el decaimiento exponencial de soluciones al problema de valor inicial con frontera de tipo (2) (Muñoz, 1992).

Es así que, motivados por lo anterior mencionado y utilizando los resultados obtenidos por Bautista et al., 2022, estudiaremos el decaimiento exponencial de las soluciones del sistema termoelástico lineal en un dominio periódico, cuando los términos no lineales en (1) son constantes.

Es decir, consideramos el sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma\theta_x = f, & t > 0, x \in (0, 2\pi) \\ \theta_t + \gamma u_{xt} - \beta\theta_{xx} = g, & t > 0, x \in (0, 2\pi), \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$ , satisfacen algunas estimaciones, con condiciones de frontera periódicas

$$\begin{cases} \partial_x^r u(t, 0) = \partial_x^r u(t, 2\pi), & t > 0, 0 \leq r \leq 1 \\ \partial_x^q \theta(t, 0) = \partial_x^q \theta(t, 2\pi), & t > 0, 0 \leq q \leq 1, \end{cases} \quad (5)$$

siendo  $r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , y condición inicial

$$\begin{cases} u(0, x) = u^0(x), & x \in (0, 2\pi), \\ u_t(0, x) = u^1(x), & x \in (0, 2\pi), \\ \theta(0, x) = \theta^0(x), & x \in (0, 2\pi). \end{cases} \quad (6)$$

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: inicialmente, introducimos algunas notaciones importantes. En segundo lugar, mencionamos los resultados de buena colocación, demostrados en Bautista et al., 2022, que serán utilizados a lo largo del trabajo. Como tercer punto, estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (4)-(6), donde mencionamos y mostramos nuestros resultados principales. Finalmente, se darán algunas conclusiones y posibles problemas futuros a estudiar.

## Preliminares

Primero introducimos algunas notaciones. Para cada  $v \in L^2(0, 2\pi)$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , denotamos por  $\widehat{v}_k$  el  $k$ -coeficiente de Fourier de  $v$ ,

$$\widehat{v}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x)e^{-ikx} dx,$$

y, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , definimos el espacio

$$H_p^m(0, 2\pi) = \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in L^2(0, 2\pi) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1 + k^2)^m < \infty \right\}$$

el producto interior

$$(v, w)_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k \overline{\widehat{w}_k} (1 + k^2)^m. \tag{7}$$

La norma correspondiente a (7) es denotada por  $\| \cdot \|_m$ . Se puede ver que

$$H_p^m(0, 2\pi) = \left\{ v \in H^m(0, 2\pi) \mid \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(0) = \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(2\pi), 0 \leq r \leq m - 1 \right\},$$

donde  $H^m(0, 2\pi)$  representa el espacio clásico de Sobolev de exponente  $m$  en  $(0, 2\pi)$ . Podemos extender la definición  $H_p^m(0, 2\pi)$  al caso  $m = s \geq 0$ , un número real no negativo, estableciendo

$$H_p^s(0, 2\pi) = \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in H^s(0, 2\pi) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1 + k^2)^s < \infty \right\}. \tag{8}$$

Para cada número real no negativo  $s$ ,  $H_p^s(0, 2\pi)$  también puede verse como un espacio de Hilbert con respecto al producto interior definido por (7) con  $m$  sustituido por  $s$ . En particular, para cada  $v \in H_p^s(0, 2\pi)$ ,

$$\|v\|_s = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1 + k^2)^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tal y como se indican Micu & Pazoto, 2017, para  $s < 0$  definimos el espacio  $H_p^s(0, 2\pi)$  como el dual topológico de  $H_p^{-s}(0, 2\pi)$ :

$$H_p^s(0, 2\pi) = (H_p^{-s}(0, 2\pi))'.$$

El teorema de la representación de Riesz garantiza que cualquier  $v \in H_p^0(0, 2\pi) = L^2(0, 2\pi)$  se puede identificar con un elemento  $w_v \in (H_p^0(0, 2\pi))'$  tal que

$$w_v(z) = \int_0^{2\pi} z(x)v(x) dx \quad (z \in H_p^0(0, 2\pi)).$$

Tradicionalmente, la misma notación se utiliza para  $v$  y  $w_v$  (los espacios  $(H_p^0(0, 2\pi))'$  y  $H_p^0(0, 2\pi)$  son identificados).

Dado  $s < 0$ , cada elemento  $w \in H_p^s(0, 2\pi)$  puede expandirse de forma única de la siguiente manera

$$w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{w}_k e^{ikx}, \tag{9}$$

donde  $\widehat{w}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x) e^{-ikx} dx$  para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . El ligero abuso de notación en (9) (el elemento  $w$  del lado izquierdo no es una función de  $x$  y la función exponencial  $e^{ikx}$  en la derecha es en realidad el representante de esta función  $L^2$  en el espacio dual) se compensa con el hecho de que la expansión (9) se parece exactamente a la correspondiente a un elemento en un espacio  $H^s$  con exponente positivo  $s$ . Por otro lado, el siguiente mapeo es un producto de dualidad entre  $H_p^s(0, 2\pi)$  y  $H_p^{-s}(0, 2\pi)$ , para cada  $s \geq 0$ ,

$$(v, w)_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k \widehat{w}_{-k}, \tag{10}$$

donde  $v \in H_p^s(0, 2\pi)$ ,  $w \in H_p^{-s}(0, 2\pi)$ . Consecuentemente, si  $s < 0$ , el espacio  $H_p^s(0, 2\pi)$  puede definirse también por (8) y puede verse como un espacio de Hilbert con respecto al producto interior (7) con  $m$  sustituido por  $s$ .

### Buena colocación

Consideramos el sistema termoelástico (4)-(6), donde  $f = g = 0$ . Además, sean  $\gamma, \beta$  que satisfacen

$$\begin{cases} |\gamma| < \sqrt{\sqrt{108} - 10}, \\ \beta > \sqrt{3(\gamma^2 + 1)}. \end{cases} \tag{11}$$

Observemos que el sistema (4)-(6) puede escribirse en la siguiente forma vectorial

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}_t = \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} (t), \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{12}$$

donde  $v = u_t$  y  $\mathcal{A}$  es el operador lineal no limitado definido por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \partial_x^2 & 0 & -\gamma\partial_x \\ 0 & -\gamma\partial_x & \beta\partial_x^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Supongamos que los datos iniciales en (6) están dados por

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^0 \\ \hat{u}_k^1 \\ \hat{\theta}_k^0 \end{pmatrix} e^{ikx}.$$

Formalmente, la solución de (4)-(6) es dado por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} (t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \hat{u}_k(t) \\ \hat{v}_k(t) \\ \hat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx},$$

donde  $\begin{pmatrix} \hat{u}_k(t) \\ \hat{v}_k(t) \\ \hat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$  satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{u}_k)_t(t) = \hat{v}_k(t), \\ (\hat{v}_k)_t(t) = -k^2\hat{u}_k(t) - i\gamma k\hat{\theta}_k(t), \\ (\hat{\theta}_k)_t(t) = -i\gamma k\hat{v}_k(t) - \beta k^2\hat{\theta}_k(t), \\ \hat{u}_k(0) = \hat{u}_k^0, \quad \hat{v}_k(0) = \hat{u}_k^1, \quad \hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_k^0, \end{array} \right. \quad (14)$$

para cada  $t \in (0, T)$ .

Por otro lado, sea el polinomio de grado 3 dado por  $f(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$ , donde  $b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Consideremos

$$p = c - \frac{b^2}{3}, \quad q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}, \quad (15)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d + 18bcd - 27d^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2, \end{aligned} \quad (16)$$

el discriminante del polinomio  $f$ .

Sean  $b = b(k)$ ,  $c = c(k)$  y  $d = d(k)$  definidos por

$$b = \beta k^2, \quad c = (\gamma^2 + 1)k^2, \quad d = \beta k^4, \quad (17)$$

y, además, sean  $p = p(k)$ ,  $q = q(k)$  y  $\Delta = \Delta(k)$  dados por (15) y (16), respectivamente, con  $b, c, d$  satisfaciendo (17).

Los siguientes resultados, cuyas demostraciones se encuentran en Bautista et al., 2022, serán necesarios para nuestro estudio.

**Lema 1.** (Bautista et al., 2022.) Para cada  $k \in \mathbb{Z}^*$ , sean

$$\lambda_{1,k} = -\frac{b}{3} - 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2,k}^\pm &= -\frac{b}{3} + \sqrt{\frac{-p}{3}} \left[ \cosh\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{3}i \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)\right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $b, c, d$  y  $p, q$  son dados por (17) y (15) respectivamente. Consideremos el siguiente operador diferencial lineal

$$L \equiv D^3 + bD^2 + cD + d.$$

Entonces, la solución  $z(t) = z_k(t)$  de

$$\begin{cases} Lz(t) = 0, \\ z(0) = z'(0) = 0; \quad z''(0) = 1, \end{cases} \quad (20)$$

es dada por

$$z_k(t) = C_k^1 e^{\lambda_{1,k}t} + C_k^{2,+} e^{\lambda_{2,k}^+t} + C_k^{2,-} e^{\lambda_{2,k}^-t}, \quad (21)$$

donde  $C_k^1$ ,  $C_k^{2,+}$  y  $C_k^{2,-}$  satisfacen

$$\begin{cases} C_k^1 = \left( (\lambda_{2,k}^+ - \lambda_{1,k})(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{1,k}) \right)^{-1}, \\ C_k^{2,+} = - \left( (\lambda_{2,k}^+ - \lambda_{1,k})(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{2,k}^+) \right)^{-1}, \\ C_k^{2,-} = \left( (\lambda_{2,k}^- - \lambda_{1,k})(\lambda_{2,k}^- - \lambda_{2,k}^+) \right)^{-1}, \end{cases} \quad (22)$$

con  $k \in \mathbb{Z}^*$ .

**Lema 2.** (Bautista et al., 2022.) La solución

$\begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$  del sistema (14) es dada por

$$\begin{cases} \widehat{u}_k(t) = \widehat{u}_k^0 q_k^0(t) + \widehat{u}_k^1 q_k^1(t) \\ \quad - \left(k^2 \widehat{u}_k^0 + i\gamma k \widehat{\theta}_k^0\right) q_k^2(t), \\ \widehat{v}_k(t) = \widehat{u}_k^1 q_k^0(t) \\ \quad - \left(k^2 \widehat{u}_k^0 + i\gamma k \widehat{\theta}_k^0\right) q_k^1(t) \\ \quad + \left(i\gamma \beta k^3 \widehat{\theta}_k^0 - k^2(\gamma^2 + 1)\widehat{u}_k^1\right) q_k^2(t), \\ \widehat{\theta}_k(t) = \widehat{\theta}_k^0 q_k^0(t) - \left(i\gamma k \widehat{u}_k^1 + \beta k^2 \widehat{\theta}_k^0\right) q_k^1(t) \\ \quad + \left(i\gamma k^3 \widehat{u}_k^0 + i\gamma \beta k^3 \widehat{u}_k^1\right) q_k^2(t) \\ \quad + \left(k^2(\beta^2 k^2 - \gamma^2)\widehat{\theta}_k^0\right) q_k^2(t), \end{cases} \quad (23)$$

donde los coeficientes  $(q_k^0(t), q_k^1(t), q_k^2(t))$  verifican

$$\begin{cases} q_k^0(t) = k^2(\gamma^2 + 1)z_k(t) + \beta k^2 z_k'(t) + z_k''(t), \\ q_k^1(t) = \beta k^2 z_k(t) + z_k'(t), \\ q_k^2(t) = z_k(t), \end{cases} \quad (24)$$

y  $z_k(t)$  satisface (21).

**Observación 1.** En primer lugar, siendo  $\zeta(k) = \frac{(q(k)/2)}{(-p(k)/3)^{3/2}} > 1$ , observamos que

$$\operatorname{arccosh} \zeta(k) = \ln \left( \zeta(k) + \sqrt{(\zeta(k))^2 - 1} \right)$$

y como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k) = 1$ , se cumple lo siguiente:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \cosh \left( \frac{1}{3} \operatorname{arccosh} \zeta(k) \right) = 1.$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \sinh \left( \frac{1}{3} \operatorname{arccosh} \zeta(k) \right) = 0.$

**Proposición 1.** (Bautista et al., 2022.) Existen constantes positivas  $l > 0$  y  $M > 0$ , tales que

$$\lambda_{1,k} \leq -lk^2, \quad (25)$$

y

$$\operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm) \leq -M, \quad (26)$$

donde  $\operatorname{Re}(z)$  denota la parte real de  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposición 2.** (Bautista et al., 2022.) Sean  $C_k^1, C_k^{2,+}$  y  $C_k^{2,-}$  dados por (22). Entonces,

$$|C_k^1| \leq \mathcal{O}(k^{-4}), \quad (27)$$

y

$$|C_k^{2,+} + C_k^{2,-}| \leq \mathcal{O}(k^{-4}). \quad (28)$$

**Observación 2.** (Bautista et al., 2022.) De hecho, se puede decir mucho más sobre los valores propios  $\lambda_{1,k}$  y  $\lambda_{2,k}^\pm$ . De (18), (19) y la Observación 1, existe una constante positiva  $C$ , tal que

$$|\lambda_{1,k}|, |\lambda_{2,k}^\pm| \leq Ck^2. \quad (29)$$

Además, de (18), (19) y como consecuencia directa de la Proposición 1, se tienen las siguientes estimativas:

$$\lambda_{1,k} \leq \operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm) \leq -M, \quad \frac{1}{|\operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm)|} \leq M, \quad (30)$$

para alguna constante positiva  $M$ .

**Teorema 1.** (Bautista et al., 2022.) Para cada  $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}^*$ , existe una constante positiva  $M > 0$ , tal que la solución  $z_k(t)$  de (20) verifica las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} |z_k(t)| \leq \mathcal{O}(k^{-4})e^{t \operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm)}, \\ |z_k'(t)| \leq \mathcal{O}(k^{-2})e^{t \operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm)}, \\ |z_k''(t)| \leq Me^{t \operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm)}. \end{cases} \quad (31)$$

**Teorema 2.** (Bautista et al., 2022.) Para cada  $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$  existe una constante positiva

$M > 0$ , tal que la solución  $\begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$  de (14)

verifica la siguiente estimativa,

$$\begin{aligned} & |\widehat{u}_k(t)|^2 + |\widehat{v}_k(t)|^2 + |\widehat{\theta}_k(t)|^2 \\ & \leq M \left( |\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2 \right) e^{2t \operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Para cada  $s \in \mathbb{R}$ , definimos el espacio

$$V^s = H_p^s(0, 2\pi) \times H_p^s(0, 2\pi) \times H_p^s(0, 2\pi), \quad (33)$$

dotado del producto interior definido por

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \right\rangle_{V^s} \\ &= (f_1, g_1)_s + (f_2, g_2)_s + (f_3, g_3)_s. \end{aligned}$$

El siguiente resultado nos proporciona un semigrupo asociado a nuestro problema lineal homogéneo.

**Teorema 3.** (Bautista et al., 2022.) Dado  $s \in \mathbb{R}$ , para cada  $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}$  en  $V^s$ , la familia de operadores lineales  $(S(t))_{t \geq 0}$  definidos por

$$S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \hat{u}_k(t) \\ \hat{v}_k(t) \\ \hat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad (34)$$

donde los coeficientes  $\begin{pmatrix} \hat{u}_k(t) \\ \hat{v}_k(t) \\ \hat{\theta}_k(t) \end{pmatrix}$  están dado por (23), es un semigrupo en  $V^s$  y verifica la siguiente estimativa,

$$\left\| S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s} \leq M \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}, \quad (35)$$

donde  $M$  es una constante positiva.

**Teorema 4.** (Bautista et al., 2022.) El generador infinitesimal del semigrupo  $(S(t))_{t \geq 0}$  es un operador limitado  $(D(A), A)$ , donde  $D(A) = V^{s+2}$  y  $A$  es dado por (13).

Como consecuencia directa de los Teoremas 3-4 y de la Teoría General de las Ecuaciones de Evolución (véase, por ejemplo, Cazenave & Haraux, 1998, o Pazy, 1983), tenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad:

**Teorema 5.** Sea  $T > 0$  y  $s \in \mathbb{R}$ . Para cada  $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \in V^s$  y  $\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in L^1(0, T; V^s)$ , existe una única solución

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in C^1([0, T]; V^{s-2}) \cap C([0, T]; V^s)$$

del sistema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}_t = A \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

que verifica la fórmula de variación de las constantes,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}(t) = S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}(s) ds.$$

Además, existe una constante positiva  $C > 0$ , que depende sólo de  $s$ , tal que

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \right\|_{C([0, T]; V^s)} \\ & \leq C \left( \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \right\|_{L^1(0, T; V^s)} + \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s} \right). \end{aligned}$$

## Comportamiento asintótico

En esta sección estudiamos el comportamiento de las soluciones del sistema (4)-(6), a medida que el tiempo se hace infinito.

En primer lugar, recordemos las dos siguientes identidades triviales que se utilizarán con frecuencia a lo largo de esta sección: Para dos

funciones diferenciables cualesquiera

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(f\bar{g}) = \operatorname{Re}(f_t\bar{g} + g_t\bar{f}), \quad (36)$$

y

$$\operatorname{Re}(if\bar{g}) = -\operatorname{Re}(ig\bar{f}). \quad (37)$$

### Resultados principales

A continuación, enunciaremos y demostraremos los principales resultados de estabilización, obtenidos del presente trabajo.

Inicialmente, sea  $\widehat{E}$  la energía asociada al sistema (14), dada por

$$\widehat{E}(t, k) = \frac{1}{2} \left[ |\widehat{v}_k|^2 + k^2 |\widehat{u}_k|^2 + |\widehat{\theta}_k|^2 \right]. \quad (38)$$

Se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 3.** *La energía  $\widehat{E}$  asociada al sistema (14) satisface la siguiente identidad:*

$$\frac{d}{dt} \widehat{E}(t, k) = -\beta k^2 |\widehat{\theta}_k|^2. \quad (39)$$

*Demostración.* Multiplicando (14)<sub>2</sub> por  $\widehat{v}_k$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{v}_{k,t} \widehat{v}_k &= -k^2 \widehat{u}_k \widehat{v}_k - i\gamma k \widehat{\theta}_k \widehat{v}_k \\ &= -k^2 \widehat{u}_k \widehat{u}_{k,t} - i\gamma k \widehat{\theta}_k \widehat{v}_k \end{aligned} \quad (40)$$

Ahora, multiplicando (14)<sub>3</sub> por  $\widehat{\theta}_k$ , obtenemos

$$\widehat{\theta}_{k,t} \widehat{\theta}_k = -i\gamma k \widehat{v}_k \widehat{\theta}_k - \beta k^2 \widehat{\theta}_k \widehat{\theta}_k. \quad (41)$$

Sumando las identidades (40)-(41) y tomando la parte real de la expresión resultante, sigue

que

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left( \widehat{v}_{k,t} \widehat{v}_k + k^2 \widehat{u}_k \widehat{u}_{k,t} + \widehat{\theta}_{k,t} \widehat{\theta}_k \right) \\ &= -\gamma k \operatorname{Re} \left( i \widehat{\theta}_k \widehat{v}_k + i \widehat{v}_k \widehat{\theta}_k \right) - \beta k^2 |\widehat{\theta}_k|^2. \end{aligned} \quad (42)$$

De (36) y (37), se deduce que

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left( \widehat{v}_{k,t} \widehat{v}_k + k^2 \widehat{u}_k \widehat{u}_{k,t} + \widehat{\theta}_{k,t} \widehat{\theta}_k \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[ |\widehat{v}_k|^2 + k^2 |\widehat{u}_k|^2 + |\widehat{\theta}_k|^2 \right], \end{aligned} \quad (43)$$

y

$$\operatorname{Re} \left( i \widehat{\theta}_k \widehat{v}_k + i \widehat{v}_k \widehat{\theta}_k \right) = 0, \quad (44)$$

respectivamente.

Finalmente, reemplazando las identidades (43) y (44) en (42), se tiene que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[ |\widehat{v}_k|^2 + k^2 |\widehat{u}_k|^2 + |\widehat{\theta}_k|^2 \right] = -\beta k^2 |\widehat{\theta}_k|^2, \quad (45)$$

lo cual demuestra la Proposición. □

Por otra parte, sea

$$\begin{aligned} &E[u, \theta](t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (|u_t(t, x)|^2 + |u_x(t, x)|^2 + |\theta(t, x)|^2) dx, \end{aligned} \quad (46)$$

la energía natural asociada al sistema (4)-(6), con  $f = g = 0$ .

Como consecuencia directa de la Proposición 3, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 6.** *La energía  $E[u, \theta]$ , del sistema (4)-(6) satisface*

$$\frac{d}{dt} E[u, \theta](t) = -\beta \int_0^{2\pi} |\theta_x(t, x)|^2 dx. \quad (47)$$

*Demostración.* Inicialmente, es claro que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |u_t(t, x)|^2 dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_{k,t}(t)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k(t)|^2, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\int_0^{2\pi} |u_x(t, x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\widehat{u}_k(t)|^2, \quad (49)$$

$$\int_0^{2\pi} |\theta(t, x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\theta}_k(t)|^2, \quad (50)$$

y

$$\int_0^{2\pi} |\theta_x(t, x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\widehat{\theta}_k(t)|^2. \quad (51)$$

Tomando sumatoria a la identidad (45), resulta

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ |\widehat{v}_k|^2 + k^2 |\widehat{u}_k|^2 + |\widehat{\theta}_k|^2 \right] \\ &= -\beta \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\widehat{\theta}_k|^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Usando las identidades (48)-(51) en (52), obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( |u_t(t, x)|^2 + |u_x(t, x)|^2 + |\theta(t, x)|^2 \right) dx \\ &= -\beta \int_0^{2\pi} |\theta_x(t, x)|^2 dx, \end{aligned}$$

demostrando la igualdad (47).  $\square$

**Observación 3.** Del Teorema 6, se desprende lo siguiente:

1. Si  $\beta > 0$ , el sistema (4)-(6) es **disipativo**. Esto es,

$$E[u, \theta](t) \leq E[u, \theta](0), \quad \forall t \geq 0. \quad (53)$$

2. Por otra parte, si  $\beta = 0$ , el sistema (4)-(6) es **conservativo**. Es decir,

$$E[u, \theta](t) = E[u, \theta](0), \quad \forall t \geq 0. \quad (54)$$

Ahora, debido a la Observación 3, analizaremos el caso en que la solución del sistema (4)-(6) decae exponencialmente para cero.

Para ello, hacemos la siguiente definición.

**Definición 1.** Decimos que la solución

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in C^1([0, T]; V^{s-2}) \cap C([0, T]; V^s)$$

del sistema (4)-(6) decae exponencialmente para cero en  $V^s$ , si existen dos constantes positivas  $M$  y  $\mu$ , tales que

$$\left\| S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s} \leq M e^{-\mu t} \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}, \quad (55)$$

para cada  $t \geq 0$  y cada  $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}$  en  $V^s$ .

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

**Teorema 7.** La solución del sistema (4)-(6) decae exponencialmente para cero. Además,  $\mu$  de (55) es dado por

$$\mu = -\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm) \right\}, \quad (56)$$

donde los autovalores  $\lambda_{2,k}^\pm$  son dados por (19).

*Demostración.* De la desigualdad (26), obtenemos que

$$0 < M \leq -\operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm), \quad (k \in \mathbb{Z})$$

donde  $M$  es una constante positiva.

Así, tenemos que existe

$$\mu = \inf_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm) \right\} = -\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm) \right\}.$$

Por otra parte, del Teorema 2 y usando la



identidad anterior, deducimos que

$$\begin{aligned}
 & |\widehat{u}_k(t)|^2 + |\widehat{v}_k(t)|^2 + |\widehat{\theta}_k(t)|^2 \\
 & \leq M e^{2t \operatorname{Re}(\lambda_{2,k}^\pm)} \left( |\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2 \right) \\
 & \leq M e^{-2t\mu} \left( |\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2 \right). \quad (57)
 \end{aligned}$$

Desde que

$$\begin{aligned}
 & \left\| S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}^2 = \\
 & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ |\widehat{u}_k|^2 + |\widehat{v}_k|^2 + |\widehat{\theta}_k|^2 \right], \quad (58)
 \end{aligned}$$

de (57) y (58), se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \left\| S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}^2 = \\
 & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ |\widehat{u}_k|^2 + |\widehat{v}_k|^2 + |\widehat{\theta}_k|^2 \right] \\
 & \leq M e^{-2t\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( |\widehat{u}_k^0|^2 + |\widehat{u}_k^1|^2 + |\widehat{\theta}_k^0|^2 \right) \\
 & = M e^{-2t\mu} \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}^2,
 \end{aligned}$$

de lo cual, al extraer la raíz cuadrada a ambos lados de la estimativa anterior, se deduce la desigualdad (55), mostrando así el Teorema.

□

## CONCLUSIONES

Basándonos en los resultados obtenidos por Bautista et al., 2022, en este trabajo hemos demostrado el decaimiento exponencial para las soluciones del sistema lineal (4)-(6).

Con respecto al sistema termoelástico, quedan abiertas las siguientes cuestiones:

- El estudio de la buena colocación y estabilización del sistema lineal, con los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$  de modo general.
- Aún queda abierta la posibilidad de obtener los mismos resultados de buena colocación y estabilización del sistema no lineal con condiciones de frontera periódicas, donde los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$  satisfacen (11) y, luego, con  $\gamma$  y  $\beta$  de modo general, lo que sería objeto de un futuro estudio.

## REFERENCIAS

- Bautista, G., Fonseca, O., & Martínez, V. (2022) Buena colocación para un sistema termoelástico lineal con condiciones de frontera periódicas, *Hatun Yachay Wasi*, 1(2), 94–108. <https://doi.org/10.57107/hyw.v1i2.27>
- Cazenave, T. & Haraux, A. (1998). *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.
- Micu, S. & Pazoto, A. (2017). Stabilization of a Boussinesq system with generalized damping, *Systems Control Letters*, 105, 62-69. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2017.04.012>
- Muñoz, J. (1992). Energy decay rates in linear thermoelasticity, *Funkcial Ekvac*, 35, 19-30. [http://www.im.ufrj.br/~rivera/Art\\\_Pub/funkcTer.pdf](http://www.im.ufrj.br/~rivera/Art\_Pub/funkcTer.pdf)
- Pazy, A. (1983). Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences*, 44, Springer-Verlag: New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>
- Racke, R. & Shibata, Y. (1991). Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 116, 1-34. <https://doi.org/10.1007/BF00375601>