


## BUENA COLOCACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS LINEAL CON CONDICIONES DE FRONTERA PERIÓDICAS

### WELL-POSEDNESS FOR A LINEAR BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS EQUATION WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

George Bautista Sánchez 

Universidad Tecnológica de los Andes, Abancay-Perú

#### Correspondencia:

Dr. George Bautista Sánchez  
gbautistas@utea.edu.pe

**Para citar este artículo:** Bautista, G.(2024). Buena colocación para la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony-Burgers lineal con condiciones de frontera periódicas. *Hatun Yachay Wasi*, 3(1), 68 - 76. <https://doi.org/10.57107/hyw.v3i1.58>

#### RESUMEN

Este artículo se ocupa del estudio de las soluciones para la ecuación Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) lineal. Demostramos que el problema de valor inicial está bien puesto en los espacios de Sobolev periódicos  $H_p^s(0, 2\pi)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , en el sentido que establecemos teoremas de existencia y unicidad globales para esta ecuación.

**Palabras clave:** Ecuación Benjamin-Bona-Mahony-Burgers lineal, expansión de Fourier, teoría de semigrupos.

#### ABSTRACT

This article is concerned with the study of the solutions of a linear Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) equation. We show that the initial value problem is well-posed in periodic Sobolev spaces  $H_p^s(0, 2\pi)$ , for all  $s \in \mathbb{R}$ , in the sense that we establish global existence and uniqueness theorems for this equation.

**Keywords:** Linear Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, Fourier expansive, semigroup theory.



## INTRODUCCIÓN

La ecuación Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (también conocida como ecuación BBMB) es una ecuación en derivadas parciales que combina elementos de la ecuación Benjamin-Bona-Mahony o BBM (*Benjamin et al., 1972*) y de la ecuación de Burgers (en *Burgers, 1948*). La BBMB representa un modelo matemático de propagación de ondas largas de pequeña amplitud, que se utiliza para describir fenómenos físicos en medios dispersivos no lineales.

Es conocido en la literatura que la ecuación BBM es una versión modificada de la ecuación de Korteweg-de Vries o KdV (véase, *Korteweg & de Vries, 1985*) que modela las ondas de superficie en canales de agua poco profundas. A diferencia de la KdV, la BBMB conserva algunas propiedades importantes, como la preservación de la forma de las ondas. Por otro lado, la ecuación de Burgers es una ecuación de transporte no lineal que modela fenómenos de propagación y disipación en medios continuos.

Tiene aplicaciones en la mecánica de fluidos, dinámica de gases y otras áreas de la física.

La combinación de estos dos modelos en la ecuación BBMB permite capturar tanto los efectos de dispersión como los fenómenos no lineales en sistemas físicos. Esto la hace especialmente relevante en la descripción de fenómenos complejos donde ambas características están presentes. La ecuación BBMB ha sido estudiada tanto desde el punto de vista teórico como numérico, y sus

soluciones han revelado una rica variedad de comportamientos, desde patrones oscilatorios hasta formación de choques.

Investigaciones recientes han explorado la ecuación BBMB en diversos contextos, como la interacción de ondas y la formación de estructuras coherentes en medios no lineales. Los resultados obtenidos a partir de esta ecuación han contribuido a la comprensión de los procesos físicos subyacentes en sistemas complejos y han permitido el desarrollo de nuevas aproximaciones analíticas y numéricas para resolver problemas desafiantes en la física y la ingeniería.

Por ejemplo, en *Arora et al., 2020*, consideran la siguiente ecuación BBMB no lineal

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \beta u_x + uu_x = 0, \quad (1)$$

con  $(x, t) \in \Omega$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas,  $\Omega = (a, b) \times (0, T]$ , con condiciones de frontera

$$u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

y condición inicial

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (3)$$

Para hallar una solución aproximada a la ecuación (1)-(3), los autores utilizan el Método de Colocación de Hermite, que es la generalización del Método de Colocación Ortogonal en elementos finitos, utilizando splines de Hermite. En este método, una función de prueba se aproxima mediante splines de Hermite. Es así que, los polinomios base interpolan la función aproximada como también de sus derivadas sucesivas en cada punto de nodo.

Por otro lado, *Zhang & Liu, 2021*, estudian, en el dominio  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T]$ , el modelo dado por

$$u_t - \mu u_{xxt} - \nu u_{xx} + \kappa u_x + \gamma u u_x = 0, \quad (4)$$

con condiciones de frontera periódicas

$$u(x, t) = u(x + L, t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T, \quad (5)$$

y condición inicial

$$u(0, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

donde  $\mu$  y  $\nu$  son constantes positivas,  $\gamma$  y  $\kappa$  son parámetros y  $L$  denota el periodo espacial.

Con la finalidad de obtener una solución aproximada, los autores usan el Esquema de Diferencia Compacta, que es una de las técnicas numéricas más prácticas, la cual tiene ventajas significativas sobre los métodos estándar de diferencias finitas. Esto debido a que obtienen una matriz de plantilla más pequeña que genera una precisión de orden superior; además, un dominio de estabilidad más grande permite tamaños de paso espaciales y temporales más grandes. Así mismo, mediante este método se obtiene una mejor resolución para ondas de alta frecuencia, Por último, es más adecuado para integraciones a largo plazo y con menos puntos de frontera les facilitan la discretización de la frontera.

Motivados por lo antes mencionado, el propósito del presente trabajo es estudiar la ecuación BBMB lineal en un dominio periódico, para obtener una solución exacta representada en series de Fourier.

Más precisamente, consideramos el modelo

$$u_t - \beta u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x = f, \quad t > 0, \quad x \in (0, 2\pi), \quad (7)$$

donde  $\beta, \alpha$  son constantes positivas,  $\gamma$  es un parámetro, con condiciones de contorno

periódicas

$$\partial_x^r u(t, 0) = \partial_x^r u(t, 2\pi), \quad t > 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (8)$$

siendo  $r \in \mathbb{N}$ , y condición inicial

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in (0, 2\pi). \quad (9)$$

El principal objetivo de este artículo es mostrar que la ecuación (7)-(9) posee una única solución que depende continuamente de los datos iniciales.

La parte restante de este trabajo está organizada de la siguiente manera: la sección 2 está evocada a los resultados preliminares, donde introducimos algunas notaciones y espacios fundamentales que se utilizarán a lo largo del trabajo. En la sección 3 demostraremos la buena colocación de la ecuación lineal donde, inicialmente, estudiaremos la ecuación homogénea y, como consecuencia directa de la Teoría de Semigrupos, presentamos un resultado para el problema no homogéneo (7)-(9). Finalmente, daremos algunas conclusiones que se desprenden de los resultados que hemos obtenido y algunos problemas en abierto.

## Preliminares

Primero introducimos algunas notaciones. Para cada  $v \in L^2(0, 2\pi)$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , denotamos por  $\hat{v}_k$  el  $k$ -coeficiente de Fourier de  $v$ ,

$$\hat{v}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) e^{-ikx} dx,$$

y, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , definimos el espacio

$$H_p^m(0, 2\pi) = \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k e^{ikx} \in L^2(0, 2\pi) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{v}_k|^2 (1 + k^2)^m < \infty \right\}$$

el producto interior

$$(v, w)_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k \overline{\widehat{w}_k} (1 + k^2)^m. \quad (10)$$

La norma correspondiente a (10) es denotada por  $\| \cdot \|_m$ . Se puede ver que

$$H_p^m(0, 2\pi) = \left\{ v \in H^m(0, 2\pi) \mid \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(0) = \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(2\pi), 0 \leq r \leq m-1 \right\},$$

donde  $H^m(0, 2\pi)$  representa el espacio clásico de Sobolev de exponente  $m$  en  $(0, 2\pi)$ . Podemos extender la definición  $H_p^m(0, 2\pi)$  al caso  $m = s \geq 0$ , un número real no negativo, estableciendo

$$H_p^s(0, 2\pi) = \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in H^s(0, 2\pi) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1 + k^2)^s < \infty \right\}. \quad (11)$$

Para cada número real no negativo  $s$ ,  $H_p^s(0, 2\pi)$  también puede verse como un espacio de Hilbert con respecto al producto interior definido por (10) con  $m$  sustituido por  $s$ . En particular, para cada  $v \in H_p^s(0, 2\pi)$ ,

$$\|v\|_s = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1 + k^2)^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tal y como se indica en [6], para  $s < 0$  definimos el espacio  $H_p^s(0, 2\pi)$  como el dual topológico de  $H_p^{-s}(0, 2\pi)$ :

$$H_p^s(0, 2\pi) = (H_p^{-s}(0, 2\pi))'.$$

El teorema de la representación de Riesz garantiza que cualquier  $v \in H_p^0(0, 2\pi) = L^2(0, 2\pi)$  se puede identificar con un elemento  $w_v \in (H_p^0(0, 2\pi))'$  tal que

$$w_v(z) = \int_0^{2\pi} z(x)v(x) dx \quad (z \in H_p^0(0, 2\pi)).$$

Tradicionalmente, la misma notación se utiliza para  $v$  y  $w_v$  (los espacios  $(H_p^0(0, 2\pi))'$  y  $H_p^0(0, 2\pi)$  son identificados).

Dado  $s < 0$ , cada elemento  $w \in H_p^s(0, 2\pi)$  puede expandirse de forma única de la siguiente manera

$$w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{w}_k e^{ikx}, \quad (12)$$

donde  $\widehat{w}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x) e^{-ikx} dx$  para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . El ligero abuso de notación en (12) (el elemento  $w$  del lado izquierdo no es una función de  $x$  y la función exponencial  $e^{ikx}$  en la derecha es en realidad el representante de esta función  $L^2$  en el espacio dual) se compensa con el hecho de que la expansión (12) se parece exactamente a la correspondiente a un elemento en un espacio  $H^s$  con exponente positivo  $s$ . Por otro lado, el siguiente mapeo es un producto de dualidad entre  $H_p^s(0, 2\pi)$  y  $H_p^{-s}(0, 2\pi)$ , para cada  $s \geq 0$ ,

$$(v, w)_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k \widehat{w}_{-k}, \quad (13)$$

donde  $v \in H_p^s(0, 2\pi)$ ,  $w \in H_p^{-s}(0, 2\pi)$ . Consecuentemente, si  $s < 0$ , el espacio  $H_p^s(0, 2\pi)$  puede definirse también por (11) y puede verse como un espacio de Hilbert con respecto al producto interior (10) con  $m$  sustituido por  $s$ .

## Buena colocación de la ecuación BBMB lineal

### La ecuación homogénea

En esta sección, estudiaremos las principales propiedades de la ecuación BBMB. Más precisamente, consideramos la ecuación (7)-(9), donde  $f = 0$ .

En primer lugar, observemos que la ecuación (7)-(9) puede escribirse en la siguiente forma vectorial:

$$\begin{cases} u_t(t) + \mathcal{A}u(t) = 0, \\ u(0) = u^0, \end{cases} \quad (14)$$

donde  $\mathcal{A} : H_p^s(0, 2\pi) \rightarrow H_p^s(0, 2\pi)$  es el operador lineal compacto, definido por

$$\mathcal{A} = (I - \beta \partial_x^2)^{-1} (\gamma \partial_x - \alpha \partial_x^2). \quad (15)$$

Recordemos que, para  $\beta > 0$ , el operador  $(I - \beta\partial_x^2)^{-1}$  es definido de la siguiente manera:

$$(I - \beta\partial_x^2)^{-1}\varphi = v \Leftrightarrow \begin{cases} v - \beta v_{xx} = \varphi \\ v(0) = v(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Entonces, si  $\varphi \in L^2(0, 2\pi)$ , se tiene que existe una única solución

$$v \in H^2(0, 2\pi) \cap H_0^1(0, 2\pi)$$

verificando la ecuación anterior y, así,

$$(I - \beta\partial_x^2)^{-1} : L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi)$$

es un operador compacto bien definido.

Ahora, supongamos que el dato inicial en (9) está dado por

$$u^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k^0 e^{ikx}.$$

Formalmente, la solución de (7)-(9) puede escribirse como

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(t) e^{ikx},$$

donde  $\hat{u}_k(t)$  satisface

$$\begin{cases} (1 + \beta k^2)(\hat{u}_k)_t(t) + (\alpha k^2 + i\gamma k)\hat{u}_k(t) = 0, \\ \hat{u}_k(0) = \hat{u}_k^0, \end{cases} \quad (16)$$

para cada  $t \in (0, T)$ .

Se tiene el siguiente resultado.

**Lema 1.** Para cada  $k \in \mathbb{Z}^*$ , la solución  $\hat{u}_k(t)$  de (16) es dada por

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k^0 e^{-z(k)t}, \quad (17)$$

donde  $z(k) = w_1(k) + iw_2(k)$ , siendo

$$w_1(k) = \frac{\alpha k^2}{1 + \beta k^2} \quad y \quad w_2(k) = \frac{\gamma k}{1 + \beta k^2}.$$

*Demostración.* Es fácil ver que el sistema (16) es equivalente a

$$\frac{d}{dt} (\hat{u}_k(t) e^{z(k)t}) = 0.$$

Por lo tanto, integrando la identidad anterior desde 0 hasta  $t$  y teniendo en cuenta el dato inicial, deducimos (17). □

**Observación 1.** Desde que  $\beta, \alpha > 0$ , se tiene que

$$\frac{\alpha}{1 + \beta} \leq w_1(k) \leq \frac{\alpha}{\beta}. \quad (18)$$

Así, de (18), obtenemos que

$$e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} \leq e^{-w_1(k)t} \leq e^{-\frac{\alpha}{1+\beta}t}, \quad (19)$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Observación 2.** Por otro lado, desde que

$$z(k) = w_1(k) + iw_2(k),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| e^{-z(k)t} - 1 \right|^2 \\ &= \left| e^{-w_1(k)t - iw_2(k)t} - 1 \right|^2 \\ &= \left| e^{-w_1(k)t} (\cos w_2(k)t - i \operatorname{sen} w_2(k)t) - 1 \right|^2 \\ &= \left| \left( e^{-w_1(k)t} \cos w_2(k)t - 1 \right) - i e^{-w_1(k)t} \operatorname{sen} w_2(k)t \right|^2 \\ &= e^{-2w_1(k)t} + 1 - 2e^{-w_1(k)t} \cos w_2(k)t. \end{aligned}$$

Siendo  $w_1(k)t, w_2(k)t \in C^\infty(\mathbb{R})$ , de lo anterior, deducimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| e^{-z(k)t} - 1 \right|^2 = 0.$$

### Resultados principales

A continuación, enunciaremos y demostraremos los teoremas principales del presente trabajo.

En la secuencia,  $M$  y  $C$  denotan una constante positiva genérica que puede cambiar de una línea a otra.

Se obtienen los siguientes resultados.

**Teorema 1.** Para cada  $t \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ , la solución  $\hat{u}_k(t)$  de (16) verifica la siguiente estimativa:

$$|\hat{u}_k(t)|^2 \leq |\hat{u}_k^0|^2 e^{-\frac{2\alpha}{1+\beta}t}. \quad (20)$$

*Demostración.* De (17) y la Observación 1, obtenemos

$$\begin{aligned} |\widehat{u}_k(t)|^2 &= |\widehat{u}_k^0|^2 \left| e^{-z(k)t} \right|^2 \\ &= |\widehat{u}_k^0|^2 e^{-2w_1(k)t} \left| e^{-iw_2(k)t} \right|^2 \\ &= |\widehat{u}_k^0|^2 e^{-2w_1(k)t} \\ &\leq |\widehat{u}_k^0|^2 e^{\frac{-2\alpha}{1+\beta}t}. \end{aligned}$$

resultando (20). □

El siguiente resultado nos proporciona un semigrupo asociado a nuestro problema lineal homogéneo.

**Teorema 2.** *Sea  $s \in \mathbb{R}$ .*

*Para cada  $u^0 \in H_p^s(0, 2\pi)$ , la familia de operadores lineales  $(S(t))_{t \geq 0}$  definidos por*

$$S(t)u^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k(t) e^{ikx}, \quad (21)$$

*donde los coeficientes  $\widehat{u}_k(t)$  están dado por (17), es un semigrupo en  $H_p^s(0, 2\pi)$  y verifica la siguiente estimativa:*

$$\|S(t)u^0\|_{H_p^s(0, 2\pi)} \leq \|u^0\|_{H_p^s(0, 2\pi)}. \quad (22)$$

*Demostración.* Por el Teorema 1, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k(t) e^{ikx} \right\|_{H_p^s(0, 2\pi)}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k(t)|^2 (1+k^2)^s \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k(t)|^2 (1+k^2)^s \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k^0|^2 e^{\frac{-2\alpha}{1+\beta}t} (1+k^2)^s \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k^0|^2 (1+k^2)^s \\ &= \|u^0\|_{H_p^s(0, 2\pi)}^2. \end{aligned}$$

Entonces,  $(S(t))_{t \geq 0}$  es un operador lineal, continuo, bien definido y satisface (22). Es fácil

comprobar que  $S(0) = I$ ,  $S(t_1) \circ S(t_2) = S(t_1 + t_2)$  para cada  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ .

Además,

$$\begin{aligned} \|S(t)u^0 - u^0\|_{H_p^s(0, 2\pi)}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k^0|^2 \Psi_k(t) (1+k^2)^s, \end{aligned}$$

donde

$$\Psi_k(t) = \left| e^{-z(k)t} - 1 \right|^2.$$

Por lo tanto, de la identidad anterior y por la Observación 2, deducimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)u^0 = u^0,$$

en  $H_p^s(0, 2\pi)$  y la prueba está completa. □

**Teorema 3.** *El generador infinitesimal del semigrupo  $(S(t))_{t \geq 0}$  es un operador limitado*

*$(D(-\mathcal{A}), -\mathcal{A})$ , donde  $D(-\mathcal{A}) = H_p^s(0, 2\pi)$  y el operador  $\mathcal{A}$  es definido en (15).*

*Demostración.* Vamos a demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u^0 - u^0}{t} = -\mathcal{A}(u^0), \quad (23)$$

si y sólo si  $u^0 \in H_p^s(0, 2\pi)$ .

Esto equivale a mostrar que la derivada en cero de la serie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k(t) e^{ikx}$ , donde los coeficientes  $\widehat{u}_k(t)$  satisfacen (17), es convergente a  $-\mathcal{A}(u^0)$  en  $H_p^s(0, 2\pi)$  si y sólo si  $u^0 \in H_p^s(0, 2\pi)$ .

Denotamos por

$$\mathcal{S}_N(t) = \sum_{|k| \leq N} \widehat{u}_k(t) e^{ikx}.$$

Afirmamos que

$$[\mathcal{S}_N]_t(0) = -\mathcal{A}(\mathcal{S}_N)(0). \quad (24)$$

En efecto, si, consideremos  $w^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{w}_k^0 e^{ikx}$ , donde

$$\widehat{w}_k^0 = \begin{cases} \widehat{u}_k(0), & |k| \leq N, \\ 0, & |k| > N, \end{cases}$$

se tiene que  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_N)(0) = \mathcal{A}(w^0)$ .

Por lo tanto, si  $-\mathcal{A}(w^0) = g$ , obtenemos

$$-(\gamma\partial_x - \alpha\partial_x^2)(w^0) = (I - \beta\partial_x^2)(g).$$

Aplicando Transformada de Fourier a la igualdad anterior, se tiene

$$\widehat{g}_k = -\left(\frac{\alpha k^2 + i\gamma k}{1 + \beta k^2}\right)\widehat{w}_k^0$$

$$= \begin{cases} -\left(\frac{\alpha k^2 + i\gamma k}{1 + \beta k^2}\right)\widehat{u}_k(0), & |k| \leq N, \\ 0, & |k| > N. \end{cases}$$

Así, tomando en cuenta (16), tenemos que

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}(\mathcal{S}_N)(0) &= -\mathcal{A}(w^0) = g \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_k e^{ikx} \\ &= \sum_{|k| \leq N} -\left(\frac{\alpha k^2 + i\gamma k}{1 + \beta k^2}\right)\widehat{u}_k(0)e^{ikx} \\ &= \sum_{|k| \leq N} \widehat{u}_{k,t}(0)e^{ikx} \\ &= [\mathcal{S}_N]_t(0), \end{aligned}$$

mostrando la identidad (24).

Sea  $(D(\mathcal{B}), \mathcal{B})$  el generador infinitesimal del semigrupo  $(S(t))_{t \geq 0}$ . Si  $u^0 \in D(\mathcal{B})$ , de (24) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u^0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u^0 - u^0}{t} \\ &= \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k(t)e^{ikx} \right]_t(0) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [\mathcal{S}_N]_t(0) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} -\mathcal{A}(\mathcal{S}_N)(0) \\ &= -\mathcal{A}(u^0). \end{aligned} \tag{25}$$

Así,  $u^0 \in D(-\mathcal{A}) = H_p^s(0, 2\pi)$  y

$$\mathcal{B}(u^0) = -\mathcal{A}(u^0),$$

para cada  $u^0 \in D(\mathcal{B})$ . Recíprocamente, sea  $u^0 \in D(-\mathcal{A}) = H_p^s(0, 2\pi)$ . Debemos demostrar que la serie  $\left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k(t)e^{ikx} \right]_t(0)$  es convergente. Esto es equivalente a mostrar que

$$[\mathcal{S}_N]_t(0) = \left[ \sum_{|k| \leq N} \begin{pmatrix} \widehat{u}_k(t) \\ \widehat{v}_k(t) \\ \widehat{\theta}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx} \right]_t(0)$$

es una secuencia de Cauchy. En efecto,

$$\begin{aligned} &\|[\mathcal{S}_{N+p}]_t(0) - [\mathcal{S}_N]_t(0)\|_{H_p^s(0, 2\pi)}^2 \\ &= \sum_{N \leq |k| \leq N+p} |\widehat{u}_{k,t}(0)|^2 (1 + k^2)^s. \end{aligned} \tag{27}$$

De (16) se deduce que

$$\begin{aligned} &|\widehat{u}_{k,t}(0)|^2 \\ &= \left| \frac{\alpha k^2 + i\gamma k}{1 + \beta k^2} \right|^2 |\widehat{u}_k(0)|^2 \\ &= \left( \frac{\alpha^2 k^4}{(1 + \beta k^2)^2} + \frac{\gamma^2 k^2}{(1 + \beta k^2)^2} \right) |\widehat{u}_k(0)|^2 \\ &= \left( \frac{\alpha^2}{\left(\frac{1}{k^2} + \beta\right)^2} + \frac{\gamma^2}{\left(\frac{1}{|k|} + \beta|k|\right)^2} \right) |\widehat{u}_k(0)|^2 \\ &= \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} \right) |\widehat{u}_k(0)|^2 \\ &\leq M |\widehat{u}_k(0)|^2, \end{aligned} \tag{28}$$

donde  $M$  es una constante positiva que sólo depende de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ .

En consecuencia, de (27) y (28), obtenemos la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned} &\|[\mathcal{S}_{N+p}]_t(0) - [\mathcal{S}_N]_t(0)\|_{\mathcal{V}^s}^2 \\ &\leq M \sum_{N \leq |k| \leq N+p} |\widehat{u}_k^0|^2 (1 + k^2)^s, \end{aligned} \tag{29}$$

y como  $u^0 \in D(-\mathcal{A}) = H_p^s(0, 2\pi)$ , de (29), se tiene que

$$[\mathcal{S}_N]_t(0) = \left[ \sum_{|k| \leq N} \widehat{u}_k(t)e^{ikx} \right]_t(0)$$

es una secuencia de Cauchy. Luego,

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}(u^0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} -\mathcal{A}(S_N)(0) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [S_N]_t(0) \\ &= \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(t) e^{ikx} \right]_t(0) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u^0 - u^0}{t} \\ &= \mathcal{B}(u^0). \end{aligned}$$

De este modo,  $u^0 \in D(B)$  y

$$-\mathcal{A}(u^0) = \mathcal{B}(u^0),$$

para cada  $u^0 \in D(-\mathcal{A}) = H_p^s(0, 2\pi)$ .

□

Además, existe una constante positiva  $C > 0$ , que depende sólo de  $s$ , tal que

$$\begin{aligned} &\|u\|_{C([0, T]; H_p^s(0, 2\pi))} \\ &\leq C \left( \|f\|_{L^1(0, T; H_p^{s-2}(0, 2\pi))} + \|u^0\|_{H_p^s(0, 2\pi)} \right). \end{aligned}$$

### El problema no homogéneo

Debido a una directa consecuencia de los Teoremas 2-3 y de la Teoría General de las Ecuaciones de Evolución (véase, por ejemplo, *Cazenave & Haraux, 1998*, o *Pazy, 1983*), tenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad:

**Teorema 4.** *Sea  $T > 0$  y  $s \in \mathbb{R}$ . Para cada  $u^0 \in H_p^s(0, 2\pi)$  y  $f \in L^1(0, T; H_p^{s-2}(0, 2\pi))$ , existe una única solución*

$$u \in C^1([0, T]; H_p^{s-2}(0, 2\pi)) \cap C([0, T]; H_p^s(0, 2\pi))$$

del sistema

$$\begin{cases} u_t(t) = -\mathcal{A}u(t) + f, \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

que verifica la fórmula de variación de las constantes:

$$u(t) = S(t)u^0 + \int_0^t S(t - \sigma)f(\sigma) d\sigma.$$



## CONCLUSIONES

En este trabajo se demuestra, inicialmente, un resultado de buena colocación global para la ecuación BBMB lineal homogénea, ecuación que depende de algunos parámetros. En segundo lugar, como una consecuencia inmediata de la teoría de semigrupos, obtuvimos la buena colocación para la ecuación BBMB lineal no homogénea.

Agregado a ello, existen algunas interrogantes interesantes que surgen de este trabajo y que merecen un estudio más profundo:

- Como consecuencia del Teorema 1, es muy probable que la solución de nuestra ecuación BBMB lineal tenga un comportamiento asintótico que tienda a cero, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Es decir, obtendríamos la estabilidad exponencial de la BBMB lineal.
- También queda abierta la posibilidad de obtener la buena colocación para la ecuación no lineal del tipo (1) o del tipo (5), con condiciones de frontera periódicas.
- Finalmente, también se estudiaría la estabilidad exponencial para las soluciones de la ecuación BBMB no lineal.
- Todo lo mencionado anteriormente será objeto de un futuro estudio.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arora, S., Jain, R., & Kukreja, V.K. (2020). Solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burger equation using collocation method with quintic Hermite splines, *Applied Numerical Mathematics*, 154, 1 -16. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.03.015>

Benjamin, T. B., Bona, J. L., & Mahony, J. J. (1972). Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions*

of the Royal Society of London. Series A, *Mathematical and Physical Sciences*, 272(1220), 47-78. <https://doi.org/10.1098/rsta.1972.0032>

Burgers, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, 1, 171-199. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70100-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70100-5)

Cazenave, T. & Haraux, A. (1998).

Cazenave, T., & Haraux, A. (1999). An introduction to semilinear evolution equations, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

Korteweg, D.J. & de Vries, G. (1985). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240), 422-443. <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>

Micu, S. & Pazoto, A. F. (2017). Stabilization of a Boussinesq system with generalized damping, *Systems Control Lett.* 105, 62-69. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2017.04.012>

Pazy, A. (1983). Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag: New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>

Zhang, Q., & Liu, L. (2021). Convergence and Stability in Maximum Norms of Linearized Fourth-Order Conservative Compact Scheme for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' Equation, *Journal of Scientific Computing*, 87(59). <https://doi.org/10.1007/s10915-021-01474-3>