

# DECAIMIENTO DE LAS SOLUCIONES PARA LA ECUACIÓN DE BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS EN UN DOMINIO PERIÓDICO

## DECAY OF SOLUTIONS FOR A BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS EQUATION ON A PERIODIC DOMAIN

George J. Bautista<sup>1</sup>  Leyter Potenciano Machado<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Universidad Tecnológica de los Andes, Abancay-Perú

### Correspondencia:

Dr. George Bautista Sánchez  
gbautistas@utea.edu.pe

**Como citar este artículo:** Bautista, G. J., & Potenciano, L. (2024).

Decaimiento de las soluciones para la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony-Burgers en un dominio periódico. *Revista de Investigación Hatun Yachay Wasi*, 3 (2), 71 - 81. <https://doi.org/10.57107/hyw.v3i2.74>

### RESUMEN

Este artículo se centra en la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) cuando el modelo se encuentra en un dominio periódico. Ampliamos los resultados previamente obtenidos en *Bautista, 2023*, referentes a la ecuación lineal. A través de un análisis espectral y la expansión de Fourier, demostramos que las soluciones de la ecuación lineal exhiben un decaimiento uniforme hacia cero. En el caso de decaimiento uniforme, el resultado se extiende para la ecuación no lineal.

**Palabras clave:** Decaimiento exponencial, ecuación Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, expansión de Fourier, teoría de semigrupos.

### ABSTRACT

In this paper we are concerned with a Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) equation, when the model is posed on a periodic domain. We extend the results obtained in *Bautista, 2023*, for the linear equation. By means of spectral analysis and Fourier expansion, we prove that the solutions of the linear equation decay uniformly to zero. In the case of uniform decay, the result is extended for the nonlinear equation.

**Keywords:** Exponential decay, Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, Fourier expansive, Semigroup theory.



## INTRODUCCIÓN

En la literatura de ecuaciones de evolución, como es bien sabido, la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) es una combinación de la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) (ver: *Benjamin et al., 1972*) y de la ecuación de Burgers (ver: *Burgers, 1948*). La ecuación resultante es una ecuación en derivadas parciales no lineal que describe la evolución de una variable en función del tiempo y del espacio, teniendo en cuenta efectos de dispersión y no linealidad. Cuando hablamos de dispersión, nos referimos a la propagación de ondas, y la no linealidad se refiere a la dependencia no lineal de la variable con respecto a sus derivadas.

La ecuación BBMB destaca por su capacidad para modelar fenómenos físicos, siendo especialmente relevante en ingeniería para mejorar la comprensión y previsión de parámetros clave en la evolución temporal y espacial. Un ejemplo aplicativo es su uso en la simulación de transporte de fluidos en tuberías, especialmente cuando se enfrentan a patrones periódicos. Asimismo, en el diseño de estructuras expuestas a cargas dinámicas, como puentes ante corrientes de agua periódicas, la ecuación BBMB se utiliza para estudiar la interacción fluido-estructura. En estos casos, la condición periódica es crucial, y la combinación de dispersión y no linealidad impacta en la propagación de ondas, siendo esencial para un diseño seguro y eficiente en sistemas de

transporte de fluidos y puentes.

Es importante destacar que el estudio teórico de la ecuación BBMB sienta las bases fundamentales para potenciales aplicaciones en la ingeniería. Comprender a fondo las propiedades y comportamientos de las soluciones del modelo proporciona una plataforma sólida para el desarrollo y la innovación en diversas áreas, subrayando así la importancia del análisis teórico.

Es así que respaldados por lo anteriormente expuesto, y basándonos en los resultados obtenidos en *Bautista, 2023*, el objetivo de este trabajo es investigar el comportamiento asintótico (es decir, para tiempos suficientemente grandes) de las soluciones de la ecuación BBMB en un dominio periódico. Más precisamente, consideramos el modelo

$$u_t - \beta u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + uu_x = 0, \quad (1)$$

con  $t > 0$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ , siendo  $\beta, \alpha$  constantes positivas,  $\gamma$  es un parámetro. El modelo está sujeto a condiciones de contorno periódicas

$$\partial_x^r u(t, 0) = \partial_x^r u(t, 2\pi), t > 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (2)$$

siendo  $r \in \mathbb{N}$ , y condición inicial

$$u(0, x) = u^0(x), x \in (0, 2\pi). \quad (3)$$

El objetivo principal de este artículo es demostrar que las soluciones de la ecuación (1)-(3) experimentan una decaída uniforme hacia cero en espacios de Sobolev apropiados. El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: inicialmente, introducimos algunas notaciones importantes. En segundo lugar, mencionamos los resultados de buena colocación, demostrados en *Bautista, 2023*, que

serán fundamentales a lo largo de nuestro análisis. Como tercer punto, estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación lineal asociada a (1)-(3), donde mencionamos y mostramos nuestros resultados principales. Luego, demostramos el decaimiento uniforme de las soluciones de la ecuación no lineal (1)-(3), para datos iniciales pequeños. Finalmente, se darán algunas conclusiones y posibles problemas y temas para investigaciones futuras.

### Preliminares

Primero introducimos algunas notaciones. Denotaremos por  $L^2(0, 2\pi)$  el espacio de las funciones reales/complejas y cuadrado integrables en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Para cada  $v \in L^2(0, 2\pi)$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , denotamos por  $\widehat{v}_k$  el  $k$ -coeficiente de Fourier de  $v$  definido por:

$$\widehat{v}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x)e^{-ikx} dx,$$

y, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , definimos el espacio

$$H_p^m(0, 2\pi) = \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in L^2(0, 2\pi) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1+k^2)^m < \infty \right\}$$

con producto interior

$$(v, w)_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k \overline{\widehat{w}_k} (1+k^2)^m. \tag{4}$$

La norma correspondiente a (4) es denotada por  $\| \cdot \|_m$ . Se puede ver que

$$H_p^m(0, 2\pi) = \left\{ v \in H^m(0, 2\pi) \mid \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(0) = \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(2\pi), 0 \leq r \leq m-1 \right\},$$

donde  $H^m(0, 2\pi)$  representa el espacio clásico de Sobolev<sup>1</sup> de exponente  $m$  en  $(0, 2\pi)$ .

<sup>1</sup>El espacio de Sobolev  $H^m(0, 2\pi)$  consiste de todas las funciones en  $L^2(0, 2\pi)$  cuyas derivadas hasta el orden  $m$  también pertenecen a  $L^2(0, 2\pi)$ .

Podemos extender la definición  $H_p^m(0, 2\pi)$  al caso  $m = s \geq 0$ , un número real no negativo, estableciendo

$$H_p^s(0, 2\pi) = \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in H^s(0, 2\pi) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1+k^2)^s < \infty \right\}. \tag{5}$$

Para cada número real no negativo  $s$ ,  $H_p^s(0, 2\pi)$  también puede verse como un espacio de Hilbert con respecto al producto interior definido por (4) con  $m$  sustituido por  $s$ . En particular, para cada  $v \in H_p^s(0, 2\pi)$ ,

$$\|v\|_s = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1+k^2)^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para  $s < 0$ , definimos el espacio  $H_p^s(0, 2\pi)$  como el dual topológico de  $H_p^{-s}(0, 2\pi)$ :

$$H_p^s(0, 2\pi) = (H_p^{-s}(0, 2\pi))'.$$

El teorema de la representación de Riesz garantiza que cualquier  $v \in H_p^0(0, 2\pi) = L^2(0, 2\pi)$  se puede identificar con un elemento  $w_v \in (H_p^0(0, 2\pi))'$  tal que

$$w_v(z) = \int_0^{2\pi} z(x)v(x) dx \quad (z \in H_p^0(0, 2\pi)).$$

Tradicionalmente, la misma notación se utiliza para  $v$  y  $w_v$ , de manera que los espacios  $(H_p^0(0, 2\pi))'$  y  $H_p^0(0, 2\pi)$  son identificados. Dado  $s < 0$ , cada elemento  $w \in H_p^s(0, 2\pi)$  puede expandirse de forma única de la siguiente manera

$$w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{w}_k e^{ikx}, \tag{6}$$

donde  $\widehat{w}_k = \frac{1}{2\pi} w(e^{-ikx})$  para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . El ligero abuso de notación en (6) (el elemento  $w$  del lado izquierdo no es una función de  $x$  y la función exponencial  $e^{ikx}$  en la derecha es en realidad el representante de esta función  $L^2$  en el espacio dual) se compensa con el hecho de que la expansión (6) se parece exactamente a

la correspondiente a un elemento en un espacio  $H^s$  con exponente positivo  $s$ . Por otro lado, el siguiente mapeo es un producto de dualidad entre  $H_p^s(0, 2\pi)$  y  $H_p^{-s}(0, 2\pi)$ , para cada  $s \geq 0$ ,

$$\langle v, w \rangle_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k \widehat{w}_{-k}, \tag{7}$$

donde  $v \in H_p^s(0, 2\pi)$ ,  $w \in H_p^{-s}(0, 2\pi)$ . En consecuencia, cuando  $s < 0$ , el espacio  $H_p^s(0, 2\pi)$  puede definirse mediante (5) y puede ser conceptualizado como un espacio de Hilbert con respecto al producto interno (4), donde  $m$  es reemplazado por  $s$ . De esta manera, se amplía la noción de espacios de Sobolev periódicos con exponentes positivos (incluyendo el cero) a exponentes negativos, utilizando un argumento de dualidad. Este enfoque es un recurso comúnmente empleado en matemáticas.

### La ecuación lineal

En esta sección estudiaremos algunas propiedades para la parte lineal de la ecuación (1)-(3).

Es decir, consideremos

$$u_t - \beta u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x = 0, t > 0, x \in (0, 2\pi), \tag{8}$$

donde  $\beta$  y  $\alpha$  son dos constantes positivas,  $\gamma$  un parámetro, con condiciones de contorno periódicas

$$\partial_x^r u(t, 0) = \partial_x^r u(t, 2\pi), t > 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{9}$$

siendo  $r \in \mathbb{N}$ , y condición inicial

$$u(0, x) = u^0(x), x \in (0, 2\pi). \tag{10}$$

### Existencia y unicidad de soluciones

Inicialmente, observemos que la ecuación (8)-(10) puede escribirse en la siguiente forma

vectorial:

$$\begin{cases} u_t(t) + \mathcal{A}u(t) = 0, \\ u(0) = u^0, \end{cases} \tag{11}$$

donde  $\mathcal{A} : H_p^s(0, 2\pi) \rightarrow H_p^s(0, 2\pi)$  es el operador lineal compacto, definido por

$$\mathcal{A} = (I - \beta \partial_x^2)^{-1} (\gamma \partial_x - \alpha \partial_x^2). \tag{12}$$

Ahora, supongamos que el dato inicial en (3) está dado por

$$u^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k^0 e^{ikx}.$$

Formalmente, la solución de (11) puede escribirse como

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k(t) e^{ikx},$$

donde  $\widehat{u}_k(t)$  satisface

$$\begin{cases} (1 + \beta k^2)(\widehat{u}_k)_t(t) + (\alpha k^2 + i\gamma k)\widehat{u}_k(t) = 0, \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{u}_k^0, \end{cases} \tag{13}$$

para cada  $t \in (0, T)$ .

Los siguientes resultados, cuyas demostraciones se encuentran detalladas en *Bautista, 2023*, serán necesarios para nuestro estudio.

**Lema 1.** (*Bautista, 2023.*) *Para cada  $k \in \mathbb{Z}^*$ , la solución  $\widehat{u}_k(t)$  de (13) es dada por*

$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{u}_k^0 e^{-z(k)t}, \tag{14}$$

donde  $z(k) = w_1(k) + iw_2(k)$ , siendo

$$w_1(k) = \frac{\alpha k^2}{1 + \beta k^2} \quad y \quad w_2(k) = \frac{\gamma k}{1 + \beta k^2}.$$

**Observación 1.** *Desde que  $\beta, \alpha > 0$ , se tiene que*

$$\frac{\alpha}{1 + \beta} \leq w_1(k) \leq \frac{\alpha}{\beta}. \tag{15}$$

Así, de (15), obtenemos que

$$e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} \leq e^{-w_1(k)t} \leq e^{-\frac{\alpha}{1+\beta}t}, \tag{16}$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Teorema 1.** (Bautista, 2023.) Para cada  $t \geq 0$  del sistema  $k \in \mathbb{Z}^*$ , la solución  $\hat{u}_k(t)$  de (13) verifica la siguiente estimativa:

$$|\hat{u}_k(t)| \leq |\hat{u}_k^0| e^{-w_1(k)t} \leq |\hat{u}_k^0| e^{-\frac{\alpha}{1+\beta}t}. \quad (17)$$

El siguiente resultado nos proporciona un semigrupo asociado a nuestro problema lineal homogéneo.

**Teorema 2.** (Bautista, 2023.) Sea  $s \in \mathbb{R}$ . Para cada  $u^0 \in H_p^s(0, 2\pi)$ , la familia de operadores lineales  $(S(t))_{t \geq 0}$  definidos por

$$S(t)u^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(t) e^{ikx}, \quad (18)$$

donde los coeficientes  $\hat{u}_k(t)$  están dado por (14), es un semigrupo en  $H_p^s(0, 2\pi)$  y verifica la siguiente estimativa:

$$\|S(t)u^0\|_s \leq \|u^0\|_s. \quad (19)$$

**Teorema 3.** (Bautista, 2023.) El generador infinitesimal del semigrupo  $(S(t))_{t \geq 0}$  es un operador limitado  $(D(-\mathcal{A}), -\mathcal{A})$ , donde  $D(-\mathcal{A}) = H_p^s(0, 2\pi)$  y el operador  $\mathcal{A}$  es definido en (12).

Por otro lado, como consecuencia directa de los Teoremas 2-3 y de la Teoría General de las Ecuaciones de Evolución (véase, por ejemplo, Cazenave & Haraux, 1998, o Pazy, 1983), tenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad:

**Teorema 4.** Sea  $T > 0$  y  $s \in \mathbb{R}$ . Para cada  $u^0 \in H_p^s(0, 2\pi)$  y  $f \in L^1(0, T; H_p^{s-2}(0, 2\pi))$ , existe una única solución

$$u \in C^1([0, T]; H_p^{s-2}(0, 2\pi)) \cap C([0, T]; H_p^s(0, 2\pi))$$

$$\begin{cases} u_t(t) = -Au(t) + f, \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

que verifica la fórmula de variación de las constantes:

$$u(t) = S(t)u^0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma.$$

Además, existe una constante positiva  $C > 0$ , que depende sólo de  $s$ , tal que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C([0, T]; H_p^s(0, 2\pi))} \\ \leq C \left( \|f\|_{L^1(0, T; H_p^{s-2}(0, 2\pi))} + \|u^0\|_s \right). \end{aligned}$$

Es importante destacar que la fórmula de variación anterior demuestra la existencia de soluciones. Además, en el caso donde  $f = u_0 = 0$ , el valor del lado derecho de la desigualdad anterior es cero, lo que implica que  $u \equiv 0$ . Este último argumento muestra la unicidad de las soluciones asociadas al sistema lineal.

### Comportamiento asintótico para la ecuación lineal

En esta sección estudiaremos el comportamiento de las soluciones de la ecuación lineal (8)-(10), a medida que el tiempo se hace infinito.

En primer lugar, recordemos la siguiente identidad trivial que se utilizará con frecuencia a lo largo de esta sección: Para dos funciones diferenciables cualesquiera

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(f\bar{g}) = \operatorname{Re}(f_t\bar{g} + g_t\bar{f}). \quad (20)$$

**Resultados principales**

A continuación, enunciaremos y demostraremos los principales resultados de estabilización para la ecuación BBMB lineal.

Sea  $\widehat{E}$  la energía asociada al sistema (13), definida por

$$\widehat{E}(t, k) = \frac{1}{2} \left[ (1 + \beta k^2) |\widehat{u}_k(t)|^2 \right]. \quad (21)$$

Se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.** *La energía  $\widehat{E}$  asociada al sistema (13) satisface la siguiente identidad:*

$$\frac{d}{dt} \widehat{E}(t, k) = -\alpha k^2 |\widehat{u}_k(t)|^2. \quad (22)$$

*Demostración.* Multiplicando (13) por  $\overline{\widehat{u}_k}$ , se tiene que

$$(1 + \beta k^2) \widehat{u}_{k,t} \overline{\widehat{u}_k} = -(\alpha k^2 + i\gamma k) |\widehat{u}_k|^2. \quad (23)$$

Tomando la parte real a la identidad (23), sigue que

$$\operatorname{Re} \left( (1 + \beta k^2) \widehat{u}_{k,t} \overline{\widehat{u}_k} \right) = -\alpha k^2 |\widehat{u}_k|^2. \quad (24)$$

Por otro lado, de (20), se deduce que

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left( (1 + \beta k^2) \widehat{u}_{k,t} \overline{\widehat{u}_k} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[ (1 + \beta k^2) |\widehat{u}_k|^2 \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Finalmente, reemplazando la identidad (25) en (24), se tiene que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[ (1 + \beta k^2) |\widehat{u}_k|^2 \right] = -\alpha k^2 |\widehat{u}_k|^2, \quad (26)$$

lo cual demuestra la Proposición.

Ahora, sea

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( |u(t, x)|^2 + \beta |u_x(t, x)|^2 \right) dx, \quad (27)$$

la energía natural asociada a la ecuación (11).

Como consecuencia directa de la Proposición 1, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 5.** *La energía  $E(t)$ , asociada a la ecuación (8)-(10), satisface*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha \int_0^{2\pi} |u_x(t, x)|^2 dx. \quad (28)$$

*Demostración.* Inicialmente, es claro que

$$\int_0^{2\pi} |u(t, x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k(t)|^2, \quad (29)$$

y

$$\int_0^{2\pi} |u_x(t, x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\widehat{u}_k(t)|^2. \quad (30)$$

Tomando sumatoria a la identidad (26), resulta

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ (1 + \beta k^2) |\widehat{u}_k|^2 \right] \\ &= -\alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\widehat{u}_k|^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Usando las identidades (29)-(30) en (31), obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( |u(t, x)|^2 + \beta |u_x(t, x)|^2 \right) dx \\ &= -\alpha \int_0^{2\pi} |u_x(t, x)|^2 dx, \end{aligned}$$

demostrando la igualdad (28).  $\square$

**Observación 2.** *Del Teorema 5, desde que  $\alpha > 0$ , tenemos que la ecuación (11) es disipativa. Esto es,*

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (32)$$

$\square$  Ahora, debido a la Observación 2, analizaremos el caso en que la solución de (8)-(10) decaea exponencialmente para cero.

Para ello, consideramos la siguiente definición.

**Definición 1.** Decimos que la solución

$$u \in C^1([0, T]; H_p^{s-2}(0, 2\pi)) \cap C([0, T]; H_p^s(0, 2\pi))$$

de (8)-(10) decae exponencialmente para cero en  $H_p^s(0, 2\pi)$ , si existen dos constantes positivas  $M$  y  $\mu$ , tales que

$$\|S(t)(u^0)\|_s \leq Me^{-\mu t} \|u^0\|_s, \quad (33)$$

para cada  $t \geq 0$  y cada  $u \in H_p^s(0, 2\pi)$ .

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

**Teorema 6.** La solución de (8)-(10) decae exponencialmente para cero. Además, el parámetro  $\mu$  en (33) es dado por

$$\mu = \inf_{k \in \mathbb{Z}} \{\operatorname{Re}(z(k))\}, \quad (34)$$

donde  $z(k)$  es definido en el Lema 1.

*Demostración.* De la desigualdad (15), obtenemos que

$$0 < \frac{\alpha}{1 + \beta} \leq \operatorname{Re}(z(k)), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Así, tenemos que existe

$$\mu = \inf_{k \in \mathbb{Z}} \{\operatorname{Re}(z(k))\}.$$

Por otra parte, del Teorema 1 y usando la identidad anterior, deducimos que

$$\begin{aligned} |\widehat{u}_k(t)|^2 &\leq e^{-2t \operatorname{Re}(z(k))} |\widehat{u}_k^0|^2 \\ &\leq e^{-2t\mu} |\widehat{u}_k^0|^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Desde que

$$\|S(t)u^0\|_s^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k(t)|^2, \quad (36)$$

de (35) y (36), se tiene que

$$\begin{aligned} \|S(t)u^0\|_s^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k(t)|^2 \\ &\leq e^{-2t\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k^0|^2 \\ &= e^{-2t\mu} \|u^0\|_s^2, \end{aligned}$$

de lo cual, al extraer la raíz cuadrada a ambos lados de la estimativa anterior, se deduce la desigualdad (33), mostrando así el Teorema. □

### La ecuación no lineal

En esta sección estudiaremos algunas propiedades para la BBMB no lineal.

Inicialmente, escribimos la ecuación (1)-(3) en su forma integral

$$u_t(t) + Au(t) + Nu(t) = 0, \quad u(0) = u^0, \quad (37)$$

donde el operador  $N$  es definido por

$$N(u) = (I - b\partial_x^2)^{-1} (uu_x), \quad (38)$$

y  $A$  es el operador compacto definido por (12).

Así, obtenemos que la solución de (37) es dada por

$$u(t) = S(t)u^0 - \int_0^t S(t - \tau)N(u)(\tau) d\tau, \quad (39)$$

donde  $(S(t))_{t \geq 0}$  es el semigrupo definido en el Teorema 2.

### Resultados principales

Ahora estamos en condiciones de demostrar la existencia, unicidad y estabilización para las soluciones de la ecuación no lineal (1)-(3) a partir de datos iniciales suficientemente

pequeños, cuando la ecuación lineal es exponencialmente estable, es decir, bajo la hipótesis del Teorema 6. La demostración se hará mediante un argumento iterativo de punto fijo. Por lo tanto, las aplicaciones del siguiente Lema, demostrado en *Bona et al., 2004*, serán necesarias:

**Lema 2.** *Sea  $s \geq -1$ . Existe una constante  $C > 0$ , dependiendo sólo de  $s$ , tal que*

$$\|fg\|_s \leq C\|f\|_{s+1}\|g\|_{s+1},$$

para todo  $f, g \in H_p^{s+1}(0, 2\pi)$ .

Se tiene el siguiente resultado.

**Lema 3.** *Para cada  $u, v \in H_p^s(0, 2\pi)$ , existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$\|N(u)\|_s \leq C\|u\|_s^2, \tag{40}$$

y

$$\|N(u) - N(v)\|_s \leq C(\|u\|_s + \|v\|_s)\|u - v\|_s, \tag{41}$$

para todo  $s \geq 0$ .

*Demostración.* De (38), deducimos que

$$(I - b\partial_x^2)_p N(u) = \frac{(u^2)_x}{2}.$$

Tomando transformada de Fourier a la igualdad anterior, tenemos

$$(\widehat{N(u)})_k = \frac{ik}{2(1 + bk^2)}(\widehat{u^2})_k. \tag{42}$$

Así, de (42), obtenemos

$$\begin{aligned} \|N(u)\|_s^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s \left| (\widehat{N(u)})_k \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{(1 + k^2)^s k^2}{2(1 + bk^2)^2} \right) \left| (\widehat{u^2})_k \right|^2 \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^{s-1} \left| (\widehat{u^2})_k \right|^2 \\ &= C\|u^2\|_{s-1}^2. \end{aligned} \tag{43}$$

Luego, para cada  $s \geq 0$ , de (43) y el Lema 2, resulta que

$$\begin{aligned} \|N(u)\|_s &\leq C\|u^2\|_{s-1} \\ &\leq C\|u\|_s\|u\|_s = C\|u\|_s^2, \end{aligned}$$

mostrando la desigualdad (40).

Por otra parte, procediendo de manera similar a lo hecho anteriormente y utilizando el Lema 2, se tiene que

$$\begin{aligned} \|N(u) - N(v)\|_s &\leq C\|u^2 - v^2\|_{s-1} \\ &\leq C\|u + v\|_s\|u - v\|_s \\ &\leq C(\|u\|_s + \|v\|_s)\|u - v\|_s, \end{aligned}$$

para cada  $s \geq 0$ , demostrando la estimativa (41). □

El resultado principal del presente trabajo es el siguiente:

**Teorema 7.** *Sea  $s \geq 0$ . Existen constantes  $r > 0$ ,  $C > 0$  y  $\mu > 0$ , tales que, para cada  $u \in H_p^s(0, 2\pi)$ , satisfaciendo*

$$\|u\|_s \leq r,$$

la ecuación (1)-(3) admite una única solución  $u \in C([0, \infty); H_p^s(0, 2\pi))$  que verifica

$$\|u\|_s \leq Ce^{-\mu t}\|u^0\|_s \quad (t \geq 0). \tag{44}$$

Además,  $\mu$  se puede tomar como en (34).

*Demostración.* Observamos que se cumple el Teorema 6. Por lo tanto, existen constantes  $M, \mu > 0$ , tales que la desigualdad (33) es satisfecha. Para utilizar un argumento de punto fijo, definimos el espacio

$$Y_{s,\mu} = \{u \in C([0, \infty); H_p^s) : e^{\mu t}u \in C([0, \infty); H_p^s)\}$$

con norma

$$\|u\|_{Y_{s,\mu}} := \sup_{0 \leq t < \infty} \|e^{\mu t} u(t)\|_s,$$

y el funcional  $\Gamma : Y_{s,\mu} \rightarrow Y_{s,\mu}$  por

$$\Gamma(u)(t) = S(t)u^0 - \int_0^t S(t-\tau)N(u)(\tau) d\tau.$$

Entonces, combinando la estimativa (40) y el Teorema 6, obtenemos

$$\begin{aligned} & \|\Gamma(u)(t)\|_s \\ & \leq Me^{-\mu t} \|u^0\|_s + M \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \|N(u)(\tau)\|_s d\tau \\ & \leq Me^{-\mu t} \|u^0\|_s + M Ce^{-\mu t} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|e^{\mu \tau} u(\tau)\|_s^2, \end{aligned} \quad (45)$$

para cada  $t \geq 0$  y algunas constantes positivas  $M$  y  $C$ .

Luego, si tomamos  $u \in B_R(0)$ , donde

$$B_R(0) = \{u \in Y_{s,\mu}; \|u\|_{Y_{s,\mu}} \leq R\},$$

de (45) concluimos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma(u)\|_{Y_{s,\mu}} & \leq M \|u^0\|_s + MC \|u\|_{Y_{s,\mu}}^2 \\ & \leq Mr + MCR^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Un cálculo similar muestra que, para cada  $u, v \in B_R(0)$  y usando (41), se tiene que

$$\begin{aligned} & \|(\Gamma(u) - \Gamma(v))(t)\|_s \\ & \leq Me^{-\mu t} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|e^{\mu \tau} (N(u) - N(v))(\tau)\|_s \\ & \leq M Ce^{-\mu t} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\|u(\tau)\|_s + \|v(\tau)\|_s) \|e^{\mu \tau} (u - v)(\tau)\|_s \\ & \leq 2RMC \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|e^{\mu \tau} (u - v)(\tau)\|_s. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\Gamma(u) - \Gamma(v)\|_{Y_{s,\mu}} \leq 2RMC \|u - v\|_{Y_{s,\mu}}. \quad (47)$$

Escogiendo  $R = 2Mr$  y  $r \leq \frac{1}{8CM^2}$ , de (46) y (47) deducimos que la aplicación

$$\Gamma : B_R(0) \subseteq Y_{s,\mu} \longrightarrow B_R(0)$$

es una contracción (es decir  $2RMC < 1$ ), por lo que admite un único punto fijo  $u \in B_R(0)$  que resuelve la ecuación integral (37). Además,

$$\|e^{\mu t} u(t)\|_s \leq R = 2Mr \quad (t \geq 0).$$

La demostración del Teorema está completada. □

## CONCLUSIONES

Tomando en cuenta los resultados obtenidos en *Bautista, 2023*, en este trabajo, inicialmente, hemos demostrado el decaimiento exponencial para las soluciones del sistema lineal (8)-(10). En segundo lugar, utilizando los resultados obtenidos para la BBMB lineal, demostramos la existencia, unicidad y el decaimiento uniforme para las soluciones de la ecuación BBMB no lineal (1)-(3). Este resultado muestra la robustez y aplicabilidad de los conceptos desarrollados.

Agregado a ello, existen algunas interrogantes interesantes que surgen de este trabajo y que merecen un estudio más profundo:

- Sea una función suficientemente regular en el sentido que posee suficientes derivadas y consideremos la ecuación

Si , podemos ver que la ecuación anterior es, justamente, la ecuación (1), la cual fue estudiada en este trabajo. Es así que, utilizando los resultados obtenidos en *Bautista, 2023*, queda abierta la posibilidad de obtener la buena colocación para la ecuación no lineal del tipo (48), con condiciones de frontera periódicas.

- Además, se estudiaría el decaimiento uniforme para las soluciones de la ecuación BBMB generalizada (48)
- Considerar la aplicación de técnicas numéricas para validar y complementar los resultados teóricos obtenidos con potenciales aplicaciones a la ingeniería es un tema relevante e importante.
- Lo mencionado anteriormente será tema de futuras investigaciones.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arora, S., Jain, R., & Kukreja, V. K. (2020). Solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation using collocation method with quintic Hermite splines. *Applied Numerical Mathematics*, 154, 1 - 16. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.03.015>
- Bautista, G. (2023). Buena colocación para la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony-Burgers lineal con condiciones de frontera periódicas. *Hatun Yachay Wasi*, 3(1), 68 - 76. <https://doi.org/10.57107/hyw.v3i1.58>
- Benjamin, T., Bona, J., & Mahony, J. (1972). Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272(1220), 47 - 78. <https://doi.org/10.1098/rsta.1972.0032>
- Bona, J., Chen, M., & Saut, J. (2004). Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media II: Nonlinear theory. *Nonlinearity*, 17(3), 925 - 952. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/3/010>
- Burgers, J. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, 1, 171 - 199. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70100-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70100-5)
- Cazenave, T., & Haraux, A. (1998). *An introduction to semilinear evolution equations*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, (13). The Clarendon Press, Oxford University Press. [https://books.google.com.pe/books/about/An\\_Introduction\\_to\\_Semilinear\\_Evolution.html?id=pcBo9WZBHyMC&redir\\_esc=y](https://books.google.com.pe/books/about/An_Introduction_to_Semilinear_Evolution.html?id=pcBo9WZBHyMC&redir_esc=y)
- Korteweg, D., & de Vries, G. (1985). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long

stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240), 422 - 443. <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>

Pazy, A. (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences, (44). Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>

Zhang, Q., & Liu, L. (2021). Convergence and stability in maximum norms of linearized fourth-order conservative compact scheme for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers’ equation. *Journal of Scientific Computing*, 87(59). <https://doi.org/10.1007/s10915-021-01474-3>