Revista de Investigación
Hatun Yachay Wasi 4(1), 90 - 100 (2025)
ISSN: 2955 - 8255

ARTICULO ORIGINAL

Recibido: 02 Setiembre 2024
Aceptado: 15 Noviembre 2024

EL PROBLEMA INVERSO DE CALDERÓN

THE INVERSE CALDERÓN'S PROBLEM

George J. Bautista [1]   Leyter Potenciano Machado[1]

[1]Universidad Tecnológica de los Andes, Abancay, Perú

Correspondencia:
Dr. Leyter Potenciano Machado
lpotencianom@utea.edu.pe

Como citar este articulo: Bautista, G., & Potenciano, L., El Problema Inverso de Calderón. *Revista De Investigación Hatun Yachay Wasi, 4*(1) 90-100. https://doi.org/10.57107/hyw.v4i1.88

RESUMEN

El artículo aborda el problema inverso de Calderón: ¿es posible recuperar potenciales eléctricos de un cuerpo solo con mediciones en su frontera? Utilizando estimaciones de Carleman para el operador Laplaciano, ofrecemos una respuesta afirmativa. Exploramos la aplicación de estas estimaciones para la recuperación del potencial eléctrico dentro de un objeto, utilizando únicamente mediciones del flujo de corriente en su frontera. Este problema, reconocido en la Física-Matemática como el problema inverso de Calderón, implica el uso de herramientas matemáticas avanzadas para formalizar el marco teórico de la recuperación de propiedades físicas internas a partir de datos y mediciones externas.
Palabras clave: Problema inverso de Calderón, Ecuación de Schrödinger estacionaria, operador laplaciano, potencial eléctrico, estimaciones de Carleman.

ABSTRACT

This article addresses the Calderón inverse problem: is it possible to recover electric potentials of an object solely from measurements on its boundary? Using Carleman estimates for the Laplacian operator, we provide an affirmative answer. We explore the application of these estimates for the recovery of the electric potential inside an object, using only measurements of current flow on its boundary. This problem, recognized in Mathematical Physics as the inverse Calderón problem, involves the use of advanced mathematical tools to formalize the theoretical framework for the recovery of internal physical properties from external data and measurements.
Keywords: Inverse Calderón's problem, Stationary Schrödinger equation, Laplacian operator, electric potential, Carleman estimates.

Introducción

En la Física-Matemática, se emplean modelos basados en Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) para estudiar el comportamiento de fenómenos físicos y capturar sus características fundamentales. Los fenómenos físicos, por lo general, son descritos mediante estas EDPs. En contraste, un problema inverso se centra en la recuperación de propiedades físicas internas de un cuerpo a partir de mediciones no invasivas realizadas en su superficie. Este tipo de problema está intrínsecamente vinculado a una ecuación diferencial específica seleccionada en función de la propiedad física que se busca analizar y recuperar. En esencia, un problema inverso busca determinar la naturaleza interna de un objeto mediante mediciones no invasivas, idealmente en la frontera u externas al propio cuerpo. Esta tarea plantea desafíos teóricos y prácticos de considerable relevancia.

Cabe mencionar que diariamente nos enfrentamos a problemas inversos en la vida cotidiana, como al seleccionar frutas en el mercado basándonos en su apariencia externa o al diagnosticar enfermedades mediante exámenes médicos no invasivos. La relevancia de realizar mediciones externas para conocer el estado interno de un cuerpo es evidente, ya que, por ejemplo, no podemos abrir cada fruta para evaluar su frescura y posterior compra en el mercado. Asimismo, en medicina, donde la apertura de cada tejido para exponer fracturas sería impracticable, hacemos uso de tecnologías como la tomografía para obtener imágenes aproximadas del estado interno de los huesos y diagnosticar lesiones. Estos métodos ilustran cómo abordamos problemas inversos en situaciones prácticas donde la apertura o intervención directa en el objeto no es viable.

Mencionamos que los problemas inversos son relevantes en diversas disciplinas, ya que la capacidad de recuperar información interna de un objeto mediante mediciones externas tiene aplicaciones amplias y prácticas. Un ejemplo claro de aplicación se encuentra en medicina, donde las imágenes de rayos X se utilizaron extensamente durante la última pandemia de Covid-19 para diagnosticar el porcentaje de daño en los pulmones de los pacientes. Desde una perspectiva teórica, la investigación en problemas inversos aborda preguntas matemáticas fundamentales, como el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de EDPs fundamentales.

En este artículo, nos enfocaremos en el estudio de cómo las estimaciones de Carleman, especialmente para el operador Laplaciano en conjuntos acotados en el espacio euclidiano, se utilizan con éxito en el ámbito de la Física-Matemática. Abordaremos específicamente el problema inverso propuesto por Alberto Calderón en la década de 1980, que se centra en la recuperación de potenciales eléctricos en el interior de un cuerpo a partir de mediciones del flujo de corriente en su frontera. Este enfoque ofrece una perspectiva única que puede ser extendida para enfrentar los desafíos planteados por problemas inversos en el ámbito de las EDPs, aplicando estas ideas y resultados a otros problemas inversos. Por ejemplo, estimaciones de Carleman asociadas a las ecuaciones de Maxwell y al sistema de Lamé han llevado a la recuperación de propiedades electromagnéticas y elásticas de un cuerpo usando únicamente mediciones en la frontera del mismo.

A lo largo de este artículo, exploraremos en detalle cómo estas estimaciones de Carleman encuentran aplicaciones en el ámbito de la Física-Matemática, centrándonos especialmente en el desafío propuesto por Alberto Calderón en la década de 1980 (ver: *Calderon [1], 1980*). Las posibles aplicaciones prácticas de este problema trascienden los límites académicos, incluyendo la localización de pozos petroleros y yacimientos mineros bajo la tierra, así como la determinación del epicentro después de un sismo y la identificación de posibles amenazas bélicas mediante el uso de radares.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: en primer lugar, introducimos algunas notaciones importantes. En segundo lugar, abordamos los resultados asociados a la estimación de Carleman para el operador Laplaciano, el cual jugará un papel fundamental a lo largo de nuestro análisis. Como tercer punto, aplicamos esta estimación de Carleman para demostrar la existencia y unicidad de soluciones del operador Laplaciano con potencial de primer orden. Finalmente, utilizamos todos los resultados previos para proporcionar una solución al problema inverso de Calderón, es decir, la recuperación del potencial eléctrico de un cuerpo a partir de mediciones eléctricas en la frontera del mismo. Además, presentaremos algunas conclusiones y discutiremos posibles problemas y temas para investigaciones futuras.

Preliminares

Primero introduciremos algunas notaciones. Denotaremos por $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un conjunto abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. En la práctica este conjunto representa el cuerpo u objeto a estudiar desde el punto de vista de problemas inversos. Usaremos $L^\infty(\Omega)$ para denotar el espacio de las funciones medibles y acotadas en Ω. El espacio de funciones cuadrado integrables será denotado por $L^2(\Omega)$. Este espacio dotado con el producto interno

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \quad f, g \in L^2(\Omega)$$

y correspondiente norma

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \langle f, f\rangle_{L^2(\Omega)}^{1/2}$$

es un espacio normado y completo, es decir, es un espacio de Hilbert. Usaremos indistintamente $\|\;\|_{L^2(\Omega)}$ ó $\|\;\|$, y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ ó $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para denotar la norma y producto interno en $L^2(\Omega)$, respectivamente. Note que $\overline{z}$ denota el conjugado complejo de $z \in \mathbb{C}$. Cabe resaltar que las funciones con soporte compacto e infinitamente derivables en Ω serán denotadas por $C_0^\infty(\Omega)$.

Denotamos también por $H^m(\Omega)$, donde $m \in \mathbb{N}$, al espacio de Sobolev que consiste de todas las funciones en $L^2(\Omega)$ cuyas derivadas hasta el orden m también pertenecen a $L^2(\Omega)$. Gracias a herramientas del Análisis Matemático, podemos verificar que si $v \in H^1(\Omega)$, entonces $v|_{\partial\Omega}$ pertenece a un espacio de Sobolev fraccionario, $H^{1/2}(\partial\Omega)$. En este sentido, podríamos decir que la regularidad de una función inicialmente definida en Ω disminuye en 1/2 al restringirla a la frontera $\partial\Omega$. No obstante, es importante destacar que no es el propósito de este artículo adentrarse en detalles rigurosos matemáticos en este aspecto. Para nuestro estudio, es suficiente mencionar que una función en un espacio de Sobolev adecuado pierde regularidad al ser restringida a la frontera del dominio. Por otro lado, $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ denota el dual topológico de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ con respecto al producto interno usual de $L^2(\partial\Omega)$.

Además, en el transcurso de nuestro estudio, emplearemos dos teoremas fundamentales del Análisis Funcional. Aunque limitaremos su aplicación al espacio $L^2(\Omega)$, es importante destacar que estos teoremas tienen una extensión a espacios de Hilbert más generales.

Teorema 1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un subespacio vectorial de $L^2(\Omega)$. Sea $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo, esto es, existe una constante $c > 0$ tal que*

$$|T(v)| \leq c\,\|v\|_{L^2(\Omega)}\,, \quad v \in \mathcal{X}.$$

Entonces existe una extensión de T de $\mathcal{X}$ a $L^2(\Omega)$, es decir, existe $\widetilde{T} : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{T}v = Tv$ para todo $v \in \mathcal{X}$. Además, la norma de $\widetilde{T}$ es exactamente igual a la norma de T.

Teorema 2 (Teorema de Riesz)**.** *Sea un operador lineal y continuo $L : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$. Existe un único $R \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\langle L, v\rangle = \langle R, v\rangle$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$ y la norma satisface

$$\|L\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = \|R\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

El problema de Calderón

El problema de Calderón aborda la recuperación de la conductividad de un cuerpo a partir de mediciones de corriente en su frontera. Es bien conocido que este problema es equivalente a la recuperación del potencial eléctrico $q \in L^\infty(\Omega)$ asociado a la ecuación de Schrödinger estacionaria

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = g, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

a partir de mediciones de corriente en la frontera $\partial\Omega$. Matemáticamente, las mediciones en la frontera se capturan mediante un operador matemático

$$\Lambda_q : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega) \tag{2}$$

definido por $\Lambda_q(g) := \nu \cdot \nabla u|_{\partial\Omega}$. Aquí, u es la solución de (1) generada por la condición en la frontera g. Además, ν denota la normal exterior a $\partial\Omega$, y ∇ representa el operador divergencia. También, Δ denota la suma de todas las derivadas parciales de segundo orden. Físicamente, g indica la inyección de potencial en la frontera de Ω, y según la ley de Ohm, $\nu \cdot \nabla u|_{\partial\Omega}$ refleja el flujo de corriente en la frontera producido por g. El siguiente resultado es el principal de este artículo, indicando que es posible recuperar el potencial a partir de mediciones en la frontera $\partial\Omega$.

Teorema 3. *Sean dos potenciales eléctricos $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$. Si $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ en $\partial\Omega$, entonces $q_1 = q_2$ en Ω.*

La demostración del Teorema 3 requiere una preparación exhaustiva a partir de una serie de resultados previos. En particular, la demostración está fuertemente fundamentada en el siguiente resultado, el cual será demostrado posteriormente en las secciones siguientes. Por ahora, asumamos que el siguiente lema es verdadero.

Lema 1. *Sean $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ tales que*

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 \overline{u_2} dx = 0$$

para todo $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$ satisfaciendo

$$(-\Delta + q_j)u_j = 0, \quad en\ \Omega, \quad j = 1, 2.$$

Entonces $q_1 = q_2$ en Ω.

Este resultado destaca que las soluciones de la ecuación de Schrödinger proporcionan información esencial sobre los potenciales correspondientes. Fue precisamente este aspecto crucial lo que motivó a Alberto Calderón a demostrar el Teorema 3, utilizando métodos sofisticados de análisis pseudodiferencial (ver: *Sylvester et al.* [10], 1987). Sin embargo, en este artículo, hemos optado por un enfoque diferente (ver: *Potenciano-Machado [9], 2017*), utilizando una estimación de Carleman apropiada para el operador laplaciano $-\Delta$. La relevancia de esta aproximación radica en que muestra de manera clara y precisa el comportamiento de las soluciones oscilatorias asociadas a la ecuación de Schrödinger estacionaria de tipo (1). Además, estas estimaciones también juegan un papel esencial en la Teoría de Control, especialmente en la demostración de desigualdades de observabilidad.

Demostración del Teorema 3. Supongamos que estamos en las condiciones del Teorema 3. La condición $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ debe entenderse como $\Lambda_{q_1} g = \Lambda_{q_2} g$ para todo $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Es decir,

$$\nu \cdot \nabla u_1|_{\partial\Omega} = \nu \cdot \nabla u_2|_{\partial\Omega},$$

donde g, u_1, y u_2 están relacionados por ($j = 1, 2$):

$$\begin{cases} (-\Delta + q_j)u_j = 0, & \text{en } \Omega, \\ u_j = g, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Consideremos (3) with $j = 1$. Multiplicando esa ecuación por $\overline{u_2}$, integrando en $L^2(\Omega)$ y usando el Teorema de Green, se obtiene a partir de

$$[(-\Delta + q_1)u_1]\, \overline{u_2} = 0, \quad \text{en } \Omega$$

la identidad integral

$$\int_\Omega q_1 u_1 \overline{u_2} dx = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla u_1\, \overline{u_2} dS - \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla \overline{u_2} dx.$$

De manera completamente análoga, considerando la versión conjugada de (3) with $j = 2$, y ahora multiplicando por u_1, obtenemos

$$\int_\Omega q_2 u_1 \overline{u_2} dx = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla \overline{u_2}\, u_1 dS - \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla \overline{u_2} dx.$$

Sustrayendo ambas igualdades, deducimos a partir de la definiciones de Λ_{q_1} y Λ_{q_2}, ver (2):

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (q_1 - q_2)u_1\overline{u_2}dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla u_1\, \overline{u_2} dS - \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla \overline{u_2}\, u_1 dS \\
&= \langle \nu \cdot \nabla u_1, u_2 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} - \langle u_1, \nu \cdot \nabla u_2 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \\
&= \langle \Lambda_{q_1} u_1, u_2 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} - \langle u_1, \Lambda_{q_2} u_2 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \\
&= \langle \Lambda_{q_1} u_1, u_2 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} - \langle \Lambda_{q_2} u_1, u_2 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \\
&= \langle (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}) u_1, u_2 \rangle_{L^2(\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

En esta derivación, hemos aprovechado el hecho de que Λ_{q_j} $(j = 1,2)$ son operadores autoadjuntos. Utilizando la hipótesis del Teorema 3, es decir, $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$, llegamos a la siguiente conclusión:

$$\int_\Omega (q_1 - q_2)u_1\overline{u_2}dx = 0,$$

where u_1, u_2 son soluciones de (3). Finalmente, inferimos el resultado deseado: $q_1 = q_2$ en Ω, como consecuencia del Lema 1. □

El resto del artículo está principalmente dedicado a la demostración del Lema 1, cuyo fundamento se basa en una estimación de Carleman para el operador laplaciano $-\Delta$.

Estimación de Carleman y sus consecuencias

Comenzamos esta sección presentando una estimación de Carleman para el operador laplaciano en su forma más elemental.

Teorema 4 (Estimación de Carleman)**.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. Denotemos por $\varphi(x) := \alpha \cdot x$. Entonces existen $C > 0$ y $\tau_0 > 0$ tales que la desigualdad*

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\tau} \left\| e^{-\tau\varphi} (-\Delta)\, e^{\tau\varphi} w \right\|_{L^2(\Omega)}$$

se cumple para todo $\tau \ge \tau_0$ y todo $w \in C_0^\infty(\Omega)$.

De ahora en adelante, emplearemos $C > 0$ al referirnos a una constante genérica que podría variar línea a línea en los siguientes cálculos. Lo crucial aquí es que dicha constante es independiente de $\tau > 0$. Asimismo, $\tau_0 > 0$ se utilizará de manera intercambiable en varias instancias para representar una constante lo suficientemente grande.

Corolario 1. *Sea $q \in L^\infty(\Omega)$. La estimación de Carleman del Teorema 4 sigue siendo válida con el operador $-\Delta$ reemplazado por $-\Delta + \overline{q}$ ó $-\Delta + q$.*

Demostración. Sea $w \in C_0^\infty(\Omega)$. Teorema 4 implica la existencia de $C > 0$ y $\tau_0 > 0$ tal que para todo $\tau \ge \tau_0$ obtenemos por desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^2(\Omega)} &\le \frac{C}{\tau} \left\| e^{-\tau\varphi} (-\Delta + q - q)\, e^{\tau\varphi} w \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \frac{C}{\tau} \left\| e^{-\tau\varphi} (-\Delta + q)\, e^{\tau\varphi} w \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{C}{\tau} \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Seleccionamos $\tau > 0$ lo suficientemente grande para que $C/\tau \|q\|_{L^\infty(\Omega)} < 1$. De esta manera, el último término de la parte derecha de la desigualdad puede ser absorbido por su contraparte en la parte izquierda. Al redefinir $C > 0$ y $\tau_0 > 0$, demostramos el resultado. De manera totalmente análoga, podemos demostrar que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\tau} \left\| e^{-\tau\varphi} (-\Delta + \overline{q})\, e^{\tau\varphi} w \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (4)$$

se cumple para todo $\tau \ge \tau_0$ y todo $w \in C_0^\infty(\Omega)$. □

Observación 1. *Para simplificar y abreviar los cálculos posteriores, se suele usar las siguientes notaciones*

$$\mathcal{P}_{\varphi,q} := e^{\tau\varphi}\left(-\Delta + q\right)e^{-\tau\varphi}$$

y su correspondiente conjugado topológico

$$\mathcal{P}^*_{\varphi,q} := e^{-\tau\varphi}\left(-\Delta + \overline{q}\right)e^{\tau\varphi}.$$

Con estas nuevas notaciones, la desigualdad (4) *se reescribe como*

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\tau}\left\|\mathcal{P}^*_{\varphi,q}w\right\|_{L^2(\Omega)}, \quad w \in C_0^\infty(\Omega) \tag{5}$$

para alguna constante $C > 0$ y $\tau \geq \tau_0$.

Teorema 5 (Existencia de soluciones)**.** *Sean $q \in L^\infty(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. Denotemos por $\varphi(x) := \alpha\cdot x$. Entonces, existen $C > 0$ and $\tau \geq \tau_0$ tal que para toda función $f \in L^2(\Omega)$ existe $R \in L^2(\Omega)$ satisfaciendo la ecuación diferencial*

$$\mathcal{P}_{\varphi,q}R = f, \quad \textit{en } L^2(\Omega). \tag{6}$$

Además, R satisface la desigualdad

$$\|R\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\tau}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \tau \geq \tau_0. \tag{7}$$

Demostración. Para demostrar este resultado usaremos de manera adecuada el Teorema de Hahn-Banach y Teorema de Riesz declarados en la sección anterior. Para esto, definimos el funcional

$$T : \mathcal{P}^*_{\varphi,q}\left(C_0^\infty(\Omega)\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

como

$$T\left(\mathcal{P}^*_{\varphi,q}w\right) = \langle f, w\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad w \in C_0^\infty(\Omega).$$

De la misma definición, es claro que T es un operador lineal. Además, afirmamos que T también es acotado. En efecto, usando (5), para $w \in C_0^\infty(\Omega)$ tenemos

$$\left|T\left(\mathcal{P}^*_{\varphi,q}w\right)\right| = |\langle f, w\rangle| \leq \frac{C}{\tau}\|f\|\left\|\mathcal{P}^*_{\varphi,q}w\right\|.$$

Lo cual implica que

$$\|T\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{P}^*_{\varphi,q}\left(C_0^\infty(\Omega)\right)\right)} \leq \frac{C}{\tau}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{8}$$

y por lo tanto T es acotado en el espacio $\mathcal{X} := \mathcal{P}^*_{\varphi,q}\left(C_0^\infty(\Omega)\right) \subset L^2(\Omega)$. En consecuencia, Teorema 1 asegura que existe una extensión de T, denotado por $\widetilde{T} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, a todo el espacio $L^2(\Omega)$ tal que la norma es preservada. Este hecho combinado con (8) implica que

$$\left\|\widetilde{T}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = \|T\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{P}^*_{\varphi,q}\left(C_0^\infty(\Omega)\right)\right)} \leq \frac{C}{\tau}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{9}$$

Por otro lado, aplicando Teorema 2, sabemos que existe $R \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle \widetilde{T}, v\rangle = \langle R, v\rangle, \quad v \in L^2(\Omega) \tag{10}$$

y

$$\left\|\widetilde{T}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = \|R\|_{L^2(\Omega)}. \tag{11}$$

Ahora verificaremos que R satisface (6) y (7). En efecto, sea $w \in C_0^\infty(\Omega)$ y denotemos $v = \mathcal{P}^*_{\varphi,q}w \in L^2(\Omega)$. Note que en este caso $\widetilde{T}v = Tv$. Usando estos elementos particulares de $L^2(\Omega)$, y de (10) y la misma definición de T, deducimos la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}\langle f, w\rangle &= \langle T, \mathcal{P}^*_{\varphi,q}w\rangle = \langle \widetilde{T}, \mathcal{P}^*_{\varphi,q}w\rangle \\ &= \langle R, \mathcal{P}^*_{\varphi,q}w\rangle = \langle \mathcal{P}_{\varphi,q}R, w\rangle.\end{aligned}$$

Desde que esto es válido para todo $w \in C_0^\infty(\Omega)$ deducimos que efectivamente R satisface (6) en $L^2(\Omega)$. Finalmente, de (9) y (11) deducimos immediatamente la desigualdad deseada (7). □

Continuamos con nuestro propósito de demostrar el Lema 1. Para este objetivo, debemos construir soluciones de $(-\Delta + q)u = 0$. A manera de motivación, y siguiendo el enfoque de Alberto Calderón al abordar el problema inverso de conductividad, uno puede notar que $\Delta(e^{-\tau\rho\cdot x}) = 0$ (referente al caso $q = 0$), siempre y cuando el vector complejo $\rho \in \mathbb{C}^n$ satisfaga $\rho \cdot \rho = 0$. La elección de trabajar con vectores complejos se debe al hecho de producen suficiente oscilación al construir las soluciones deseadas. Estas soluciones deben oscilar lo suficiente para que la identidad integral $\int_\Omega (q_1 - q_2)u_1\overline{u_2}\, dx = 0$ brinde información oculta acerca de $q_1 - q_2$. En el caso en que $q \neq 0$, se espera obtener soluciones de $(-\Delta + q)u = 0$ de la forma

$$u = e^{-\tau\rho\cdot x} + \text{error} = e^{-\tau\rho\cdot x}(1 + e^{\tau\rho\cdot x}\text{error}).$$

Esto conlleva a buscar soluciones de $(-\Delta + q)u = 0$ en Ω con $q \in L^\infty(\Omega)$ de la forma

$$u = e^{-\tau\rho\cdot x}(1 + r), \quad \rho \in \mathbb{C}^n,\ \rho \cdot \rho = 0.$$

Si reemplazamos este tipo de soluciones en la ecuación $(-\Delta + q)u = 0$, llegamos a la conclusión de que tales soluciones existen siempre y cuando

$$e^{\tau\rho\cdot x}(-\Delta + q)e^{-\tau\rho\cdot x}R = -e^{-i\tau\Im\rho\cdot x}q,$$

lo cual implica ($\rho = \Re\rho + \Im\rho$) que

$$e^{\tau\Re\rho\cdot x}(-\Delta + q)e^{-\tau\Re\rho\cdot x}R = -e^{-i\tau\Im\rho\cdot x}q. \quad (12)$$

con

$$r = e^{i\tau\Im\rho\cdot x}R \quad (13)$$

Aquí, i es la unidad imaginaria compleja. $\Re\rho$ y $\Im\rho$ denota la parte real e imaginaria del vector complejo ρ, respectivamente. Por lo tanto, la existencia de la solución u de $(-\Delta + q)u = 0$, se reduce a la existencia de r, que a su vez se reduce a la existencia de R que satisface (12).

Teorema 6. *Sea $q \in L^\infty(\Omega)$, $\rho \in \mathbb{C}^n$ tal que $\rho = \Re\rho + i\Im\rho$, $|\Re\rho| = |\Im\rho| = 1$ y $\Re\rho \cdot \Im\rho = 0$. Entonces existen $C > 0$ y $\tau_0 > 0$ tales que existe una solución de $(-\Delta + q)u = 0$ en Ω de la forma*

$$u = e^{-\tau\rho\cdot x}(1 + r),$$

donde $r \in L^2(\Omega)$ satisface la desigualdad

$$\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\tau}\|q\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \tau \geq \tau_0.$$

Demostración. Comenzamos la demostración observando que, dado que $q \in L^\infty(\Omega)$ y $|e^{-i\tau\Im\rho\cdot x}| = 1$, la función $f := -e^{-i\tau\Im\rho\cdot x}q$ pertenece a $L^2(\Omega)$. Utilizando el Teorema 5 con el vector unitario $\alpha = \Re\rho$, concluimos la existencia de una solución $R \in L^2(\Omega)$ que satisface (12). Además, esta solución cumple con la estimación

$$\|R\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\tau}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \tau \geq \tau_0.$$

Al emplear la relación entre r y R dada por (13), obtenemos

$$\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\tau}\|f\|_{L^2(\Omega)} = \frac{C}{\tau}\|q\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Esto concluye la demostración. □

Con todos estos resultados previos a mano, estamos en posición de demostrar finalmente el Lema 1, y así concluir el resultado principal de este artículo.

Demostración del Lema 1. Asumamos todas las condiciones del Lema 1. La idea consiste en elegir vectores complejos apropiados para hacer uso de la existencia de soluciones, según lo establecido en el Teorema 6. Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ y consideremos vectores arbitrarios α y β en $\mathbb{R}^n$ de manera que $\{\xi, \alpha, \beta\}$ forme un conjunto ortogonal. Unos calculos sencillos muestran que los siguientes vectores complejos

$$\rho_1 := \alpha + i\left(\frac{\xi}{2\tau} + \sqrt{1 - \frac{|\xi|^2}{4\tau^2}}\,\beta\right)$$
$$\rho_2 := -\alpha + i\left(-\frac{\xi}{2\tau} + \sqrt{1 - \frac{|\xi|^2}{4\tau^2}}\,\beta\right)$$

satisfacen

$$|\Re\rho_j| = |\Im\rho_j| = 1,\ \Re\rho_j \cdot \Im\rho_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

La elección de estos vectores no es aleatoria; más bien, se ha realizado de manera que el resultado de existencia de soluciones oscilatorias para el operador estacionario de Schrödinger, conforme al Teorema 6, pueda ser aplicado. Además, estos vectores cumplen con la condición $\tau(\rho_1 + \overline{\rho_2}) = i\xi$. En consecuencia, el Teorema 6 garantiza una vez más la existencia de una constante $C > 0$, $\tau_0 > 0$, y funciones $r_1, r_2 \in L^2(\Omega)$ tales que

$$u_j = e^{-\tau\rho_j \cdot x}(1 + r_j), \quad j = 1, 2 \tag{14}$$

es una solución de $(-\Delta + q_j)u_j = 0$ en Ω tal que para todo $\tau \geq \tau_0$ uno tiene

$$\|r_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\tau}\|q_j\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad j = 1, 2.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, también podemos asegurar que

$$\|r_1\| + \|\overline{r_2}\| + \|r_1\overline{r_2}\| \leq \frac{C}{\tau}, \tag{15}$$

donde $C := C(q_1, q_2) > 0$ depende únicamente de los potenciales q_1, q_2, y del dominio Ω. Esta desigualdad implica que $\|r_1\| + \|\overline{r_2}\| + \|r_1\overline{r_2}\|$ tiende a cero cuando τ tiende a infinito. Este hecho será crucial en la siguiente parte de la demostración.

Por hipótesis del Teorema, tenemos la siguiente identidad integral $\int_\Omega (q_1 - q_2)u_1\overline{u_2}dx = 0$. Utilizando las soluciones oscilatorias dadas en (14), obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (q_1 - q_2)\left[e^{-\tau\rho_1 \cdot x}(1 + r_1)\right]\left[\overline{e^{-\tau\rho_2 \cdot x}(1 + r_2)}\right]dx \\
&= \int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-\tau(\rho_1 + \overline{\rho_2})}(1 + r_1)(1 + \overline{r_2})\,dx \\
&= \int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-i\,\xi \cdot x}(1 + r_1)(1 + \overline{r_2})\,dx \\
&= \int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-i\,\xi \cdot x}dx \\
&\quad + \int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-i\,\xi \cdot x}(r_1\overline{r_2} + r_1\overline{r_2})dx.
\end{aligned}$$

El primer término en el lado derecho es independiente del parámetro τ, sin embargo, y esta es la parte importante en la demostración, el segundo término depende fuertemente de τ. Además, ese término se puede despreciar si hacemos tender τ al infinito y usamos (15). Así, tomando el límite en τ, la identidad anterior implica

$$\int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-i\,\xi \cdot x}dx = 0$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Esto implica que la transformada de Fourier de la extensión por cero fuera de Ω de $q_1 - q_2$ es cero. La inyectividad de la transformada de Fourier implica el resultado deseado: $q_1 = q_2$ en Ω. Esto concluye la demostración. □

CONCLUSIONES

Hemos demostrado con rigurosidad matemática la solubilidad del problema de Calderón, es decir, que es posible determinar el potencial eléctrico de un cuerpo a partir de mediciones de flujo de corriente en toda su frontera. Para lograr esto, nos hemos apoyado fuertemente en una estimación de Carleman asociada al operador laplaciano. Al adoptar este enfoque, también hemos explorado la viabilidad de emplear métodos distintos a los utilizados por Calderón, optando por una estimación de Carleman apropiada. Esta elección ha revelado de manera clara y precisa el comportamiento de las soluciones oscilatorias asociadas a la ecuación de Schrödinger estacionaria, brindando así una perspectiva alternativa en el estudio de problemas inversos. Este método tiene el potencial de ser extendido y aplicado a una variedad de problemas inversos, con posibles aplicaciones en diversas ramas de la ciencia. De esta manera, nuestro trabajo no solo se enfoca en proporcionar las herramientas matemáticas para resolver el problema de Calderón, sino que también abre puertas hacia aplicaciones concretas para investigar otras propiedades físicas de los objetos mediante el uso de estimaciones de tipo Carleman apropiadas.

Como parte de nuestro plan futuro de investigaciones, planeamos abordar problemas inversos más complejos y de alta relevancia debido a su aplicabilidad práctica. Entre ellos, mencionamos la recuperación de potenciales a partir de mediciones localizadas únicamente en parte de la frontera. Este aspecto es crucial, ya que, en la práctica, a menudo solo se tiene acceso parcial a los datos. Estos temas serán objeto de futuras investigaciones.

REFERENCIAS

Calderón, A.P. (1980). *On an inverse boundary value problem, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matematica, 65-73. https://citeseerx.ist.psu.edu/d

Bukhgeim, A. & Uhlmann, G. (2002). *Recovering a potential from partial Cauchy data*, Comm. Partial Differential Equations, 27, 653–668. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1081/PDE-120002868

Caro, P., Dos Santos Ferreira, D., & Ruiz, A. (2014). *Stability estimates for the Radon transform with restricted data and applications*, Advances in Mathematics, 267, 523–564. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870814003090

Caro, P., Dos Santos Ferreira, D., & Ruiz, A. (2016). *Stability estimates for the Calderón problem with partial data, J. Differential Equations*, 260, 2457-2489. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039615005446

Dos Santos Ferreira, D., Kenig, C. E., Sjöstrand, J., & Uhlmann, G. (2007). *Determining a magnetic Schrödinger operator from partial Cauchy data*, Comm. Math. Phys., 271, 467–488. https://link.springer.com/article/10.1007/s00220-006-0151-9

Kenig, C. E., & Salo, M. (2013). *The Calderón problem with partial data on manifolds and applications*, Analysis and PDE, 6(8), 2003-2048. https://msp.org/apde/2013/6-8/p07.xhtml

Kenig, C. E., & Salo, M. (2014). *Recent progress in the Calderón problem with partial data*, Contemp. Mathematics. https://www.ams.org/books/conm/615/

Kenig, C. E., Sjöstrand, J., & Uhlmann, G. (2007). *The Calderón problem with partial data*, Annals of Mathematics, 165, 567–591. https://annals.math.princeton.edu/2007/165-2/p05

L. Potenciano-Machado (2017). *Inverse boundary value problems with partial and local data for the magnetic Schrödinger operator*, Ph.D. thesis. Universidad Autónoma de Madrid. https://repositorio.uam.es/handle/10486/678454

Sylvester, J. & Uhlmann, G. (1987). *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math., 125, 153–169. https://annals.math.princeton.edu/1987/125-1/p04