

BUENA COLOCACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ BUENA CON DISIPACIÓN INTERNA

WELL POSEDNESS FOR THE GOOD BOUSSINESQ EQUATION WITH INTERNAL DISSIPATION

George J. Bautista¹  Leyter Potenciano-Machado¹  Cristian Loli Prudencio² 

¹Universidad Tecnológica de los Andes (UTEA), Abancay, Perú.

²Universidade Federal Fluminense, Campus Gragoatá, Brasil

Correspondencia:
Dr. George J. Bautista
gbautistas@utea.edu.pe

Como citar este artículo: Bautista, G., Potenciano-Machado, L., & Loli, C. (2025). Buena colocación de la ecuación de Boussinesq buena con disipación interna. *Revista de Investigación Hatun Yachay Wasi*, 4(2), pp. 33–42. DOI: 10.57107/hyw.v4i2.94

RESUMEN

Este artículo se centra en el estudio de la ecuación de Boussinesq buena, demostrando la existencia y unicidad de soluciones en espacios de Sobolev periódicos $H_p^s(0, 2\pi) \times H_p^{s-2}(0, 2\pi)$, para $s \geq 2$. La estrategia adoptada consiste en abordar primero un caso particular, en el que uno de los coeficientes de la ecuación es idénticamente cero, y luego extender los resultados al caso general mediante un procedimiento iterativo basado en el método de punto fijo. Para ello, se emplean herramientas fundamentales como la Teoría de Semigrupos y el Análisis de Fourier.

Palabras claves: Ecuación de Boussinesq buena, expansión de Fourier, Teoría de semigrupos, método del punto fijo.

ABSTRACT

This article focuses on the study of the good Boussinesq equation, proving the existence and uniqueness of solutions in periodic Sobolev spaces $H_p^s(0, 2\pi) \times H_p^{s-2}(0, 2\pi)$, for $s \geq 2$. The adopted strategy consists of first analyzing a particular case, in which one of the equation's coefficients is identically zero, and then extending the results to the general case through an iterative procedure based on the fixed-point method. To achieve this, fundamental tools such as Semigroup Theory and Fourier Analysis are employed.

Keywords: Good Boussinesq equation, Fourier expansion, Semigroup Theory, Fixed-point method.



INTRODUCCIÓN

El trabajo de J. Boussinesq en la década de 1870 condujo al desarrollo de modelos físicos fundamentales en dinámica de fluidos, concretamente para describir la propagación de ondas largas de pequeña amplitud en fluidos (ver: *Boussinesq, 1872* y *Boussinesq, 1878*). Estos modelos, conocidos como las ecuaciones de Boussinesq, han sido ampliamente investigados debido a su relevancia en diversos fenómenos físicos, incluyendo las olas del océano, la dinámica atmosférica y la convección térmica. Véanse, por ejemplo, *Bachelor, 1953*; *Bona et al., 1988*; *Vallis, 2017*; *Zakharov et al., 1992*, y sus referencias.

Las ecuaciones de Boussinesq no solo son significativas desde una perspectiva física, sino también matemática, pues estas presentan una serie de comportamientos complejos, como la disipación de ondas y la turbulencia. La teoría de Boussinesq proporcionó a la comunidad científica la primera explicación coherente de las ondas solitarias, un notable fenómeno natural que fue observado por primera vez por J. Scott-Russell varias décadas antes del trabajo de Boussinesq (ver: *Scott-Russell, 1845*).

La familia de ecuaciones de Boussinesq posee diversas variantes, cada una adaptada a aplicaciones específicas. Dos de las más destacadas son las siguientes ecuaciones:

$$u_{tt} \pm u_{xxxx} - u_{xx} + (u^2)_{xx} = 0. \quad (1)$$

El signo del término de orden superior en

la variable espacial u_{xxxx} es crucial. Si el signo es positivo, dichos términos pueden descomponerse en dos ecuaciones de tipo Schrödinger que se propagan en direcciones opuestas. En consecuencia, la buena colocación de la ecuación puede demostrarse despreciando los términos de orden inferior y considerando solo los superiores. En este caso, la ecuación se conoce en la literatura como la *Ecuación de Boussinesq buena*, debido a las propiedades mencionadas anteriormente.

Por el contrario, si el signo es negativo, los términos de orden superior pueden descomponerse en dos ecuaciones de tipo térmico, una de las cuales presenta un signo incorrecto en el término de difusión. En consecuencia, el análisis de la buena colocación se torna más complejo.

La forma más utilizada de las ecuaciones de Boussinesq es la dada por (1), una versión simplificada que desprecia los efectos de la dispersión y la no linealidad. En este artículo, nos enfocaremos en la versión periódica de la *Ecuación de Boussinesq buena*:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xx} + a(x)u_t = 0, & x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \\ u(0, x) = u^0(x), & x \in (0, 2\pi), \\ u_t(0, x) = u^1(x), & x \in (0, 2\pi), \end{cases} \quad (2)$$

con condiciones de contorno periódicas

$$\partial_x^r u(t, 0) = \partial_x^r u(t, 2\pi), \quad t > 0, \quad r \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r \leq 3, \quad (3)$$

donde $u(x, t)$ representa la velocidad horizontal del fluido, t es el tiempo, x es la distancia horizontal y el coeficiente que acompaña a u_t satisface la siguiente condición:

$$\begin{cases} a \in C_p^\infty(0, 2\pi) \text{ es una función no negativa en } (0, 2\pi) \\ \text{con } a(x) > 0 \text{ en un conjunto abierto } \Omega_1 \subset (0, 2\pi). \end{cases} \quad (4)$$

Cabe mencionar que la *Ecuación de Boussinesq buena* es un modelo útil para estudiar el comportamiento de las olas en aguas poco profundas, donde los efectos de dispersión y no linealidad son relativamente pequeños.

El principal objetivo de este artículo es demostrar que la ecuación (2)-(3) posee una única solución que depende continuamente de los datos iniciales u_0 y u_1 .

La parte restante de este trabajo se organiza de la siguiente manera: la segunda parte del trabajo está dedicada a los resultados preliminares, donde introducimos algunas notaciones y espacios fundamentales que se utilizarán a lo largo del trabajo. En la tercera parte, inicialmente, estudiaremos la buena colocación de la ecuación lineal con el término disipativo a , dado en (4), cuando es igual a cero y, como consecuencia directa de la Teoría de Semigrupos, presentamos un resultado para el problema no homogéneo (2)-(3) con $a \equiv 0$. Luego, enunciamos y demostramos nuestro resultado principal. Finalmente, presentamos algunas conclusiones derivadas de los resultados obtenidos y planteamos algunos problemas abiertos.

Preliminares

Primero introducimos algunas notaciones. Para cada $v \in L^2(0, 2\pi)$ y $k \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\widehat{v}_k$

el k -coeficiente de Fourier de v ,

$$\widehat{v}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) e^{-ikx} dx,$$

y, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos el espacio

$$H_p^m(0, 2\pi) := \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in L^2(0, 2\pi) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1 + k^2)^m < \infty \right\}$$

dotado del producto interior

$$(v, w)_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k \overline{\widehat{w}_k} (1 + k^2)^m. \quad (5)$$

La norma correspondiente a (5) es denotada por $\|\cdot\|_m$. Se puede verificar que

$$H_p^m(0, 2\pi) = \left\{ v \in H^m(0, 2\pi) \mid \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(0) = \frac{\partial^r v}{\partial x^r}(2\pi), \ 0 \leq r \leq m-1 \right\},$$

donde $H^m(0, 2\pi)$ representa el espacio clásico de Sobolev de exponente $m \in \mathbb{N}$ en el intervalo $(0, 2\pi)$. Podemos extender la definición $H_p^m(0, 2\pi)$ al caso $m = s \geq 0$, un número real no negativo, estableciendo

$$H_p^s(0, 2\pi) = \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx} \in H^s(0, 2\pi) \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1 + k^2)^s < \infty \right\}. \quad (6)$$

Para cada número real no negativo s , $H_p^s(0, 2\pi)$ también puede verse como un espacio de Hilbert con respecto al producto interior definido por (5) con $m \in \mathbb{N}$ sustituido por $s \in \mathbb{R}_0^+$. En particular, para cada $v \in H_p^s(0, 2\pi)$, tenemos

$$\|v\|_s = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{v}_k|^2 (1 + k^2)^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tal y como indica Micu et al., 20217, para $s < 0$ definimos el espacio $H_p^s(0, 2\pi)$ como el dual topológico de $H_p^{-s}(0, 2\pi)$:

$$H_p^s(0, 2\pi) = (H_p^{-s}(0, 2\pi))'.$$

Cabe resaltar que el Teorema de la Representación de Riesz garantiza que cualquier $v \in H_p^0(0, 2\pi) = L^2(0, 2\pi)$ se puede identificar con un elemento $w_v \in (H_p^0(0, 2\pi))'$ tal que

$$w_v(z) = \int_0^{2\pi} z(x) v(x) dx \quad (z \in H_p^0(0, 2\pi)).$$

Tradicionalmente, la misma notación se utiliza para v y w_v (los espacios $(H_p^0(0, 2\pi))'$ y $H_p^0(0, 2\pi)$ son identificados).

Dado $s < 0$, cada elemento $w \in H_p^s(0, 2\pi)$ puede expandirse de forma única de la siguiente manera

$$w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{w}_k e^{ikx}, \quad (7)$$

donde $\hat{w}_k = \frac{1}{2\pi} w(e^{-ikx})$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

El ligero abuso de notación en (7) (donde el elemento w en el lado izquierdo no es una función de x , y la función exponencial e^{ikx} en la derecha es en realidad el representante de esta función en L^2 dentro del espacio dual) se compensa con el hecho de que la expansión (7) se asemeja exactamente a la correspondiente a un elemento en un espacio H^s con exponente positivo s . Por otro lado, el siguiente mapeo es un producto de dualidad entre

$H_p^s(0, 2\pi)$ y $H_p^{-s}(0, 2\pi)$, para cada $s \geq 0$,

$$\langle v, w \rangle_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k \hat{w}_{-k}, \quad (8)$$

donde $v \in H_p^s(0, 2\pi)$, $w \in H_p^{-s}(0, 2\pi)$. Consecuentemente, si $s < 0$, el espacio $H_p^s(0, 2\pi)$ también puede definirse mediante (6) y puede considerarse un espacio de Hilbert con respecto al producto interior (5), tomando m sustituido por s .

Buena colocación

Sistemas lineales con $a \equiv 0$

Primero analizamos la versión linealizada de la ecuación de Boussinesq buena (2)-(3) cuando el término disipativo es idénticamente cero. Es

decir, consideramos el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xx} = 0 & \text{for } x \in (0, 2\pi), t > 0, \\ \partial_x^r u(t, 0) = \partial_x^r u(t, 2\pi) & \text{for } t > 0, 0 \leq r \leq 3, \\ u(0, x) = u^0(x) & \text{for } x \in (0, 2\pi), \\ u_t(0, x) = u^1(x) & \text{for } x \in (0, 2\pi), \end{cases} \quad (9)$$

donde $r \in \mathbb{N}$. La regularidad de u_0 y u_1 se indicará más adelante.

La buena colocación de la ecuación anterior se derivó del análisis espectral realizado en *Cerpa et al., 2018*, mediante el uso de herramientas de Análisis de Fourier. Con el objetivo de brindar una exposición completa, incluimos dichos resultados aquí.

Dado $\beta \in \mathbb{R}$, introduzcamos el espacio de Hilbert

$$V^\beta = H_p^\beta(0, 2\pi) \times H_p^{\beta-2}(0, 2\pi), \quad (10)$$

dotado del producto interior definido por

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (f_1, g_1)_\beta + (f_2, g_2)_{\beta-2},$$

donde $(\cdot, \cdot)_\beta$ denota el producto interno en (5) con m reemplazado por β .

En primer lugar, observemos que el sistema (9) puede reescribirse en la siguiente forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix},$$

donde A es un operador lineal compacto en V^β , véase, por ejemplo *Cerpa et al., 2018* y *Micu et al., 2009*, definido por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \partial_x^2 - \partial_x^4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Así, si suponemos que los datos iniciales en (9) vienen dados por

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^0 \\ \hat{u}_k^1 \end{pmatrix} e^{ikx},$$

entonces, la solución de (9) puede escribirse formalmente como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \hat{u}_k(t) \\ \hat{v}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx},$$

donde el par $(\hat{u}_k(t), \hat{v}_k(t))$ cumple la siguiente EDO de valor inicial con $T > 0$

$$\begin{cases} (\hat{u}_k)_t - \hat{v}_k = 0, & t \in (0, T), \\ (\hat{v}_k)_t + k^2(1 + k^2)\hat{u}_k = 0, & t \in (0, T), \\ \hat{u}_k(0) = \hat{u}_k^0, & \hat{v}_k(0) = \hat{u}_k^1. \end{cases} \quad (12)$$

Así, tenemos el siguiente resultado:

Lema 1. (Cerpa et al., 2018) Sean

$$\lambda_k^\pm = \pm i|k|\sigma(k); \quad \sigma(k) = \sqrt{1 + k^2}. \quad (13)$$

La solución $(\hat{u}_k(t), \hat{v}_k(t))$ de (12) es dada por

$$\begin{cases} \hat{u}_k(t) = \frac{1}{2} [a_k^+ e^{\lambda_k^+ t} + a_k^- e^{\lambda_k^- t}], \\ \hat{v}_k(t) = \frac{1}{2} [b_k^- e^{\lambda_k^+ t} + b_k^+ e^{\lambda_k^- t}], \end{cases} \quad (14)$$

donde

$$\begin{cases} a_k^+ = \left(\hat{u}_k^0 + \frac{1}{i|k|\sigma(k)} \hat{u}_k^1 \right), \\ b_k^+ = \left(\frac{|k|\sigma(k)}{2i} \hat{u}_k^0 + \hat{u}_k^1 \right), \\ a_k^- = \left(\hat{u}_k^0 - \frac{1}{i|k|\sigma(k)} \hat{u}_k^1 \right), \\ b_k^- = \left(-\frac{|k|\sigma(k)}{2i} \hat{u}_k^0 + \hat{u}_k^1 \right), \end{cases}$$

si $k \neq 0$ y

$$\begin{cases} \hat{u}_0(t) = \hat{u}_0^1 t + \hat{u}_0^0, \\ \hat{v}_0(t) = \hat{u}_0^1. \end{cases} \quad (15)$$

Gracias al Lemma 1, se puede demostrar que el operador A genera un grupo analítico en V^β .

Teorema 1. (Cerpa et al., 2018) Sean $\beta \in \mathbb{R}$ y $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in V^\beta$. La familia de operadores lineales $(S(t))_{t \geq 0}$ definida por

$$S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \hat{u}_k(t) \\ \hat{v}_k(t) \end{pmatrix} e^{ikx},$$

donde los coeficientes $\begin{pmatrix} \hat{u}_k(t) \\ \hat{v}_k(t) \end{pmatrix}$ son dados por (14)-(15), es un grupo de isometrías en V^β . Además, el generador infinitesimal es el operador $(D(A), A)$, donde $D(A) = V^\beta$ y A es dado por (11).

A partir del Teorema 1 y mediante técnicas estándar de la Teoría de Semigrupos, obtenemos el siguiente resultado global de buena colocación:

Teorema 2. (Cazenave et al., 1988 y Pazy, 1983) Sean $T > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

Para cada $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in V^\beta$ (ver (10)) y f en $L^1(0, T; H_p^{\beta-2}(0, 2\pi))$, existe una única solución $(u, v) \in W^{1,1}([0, T]; V^\beta)$ del sistema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (16)$$

que verifica la fórmula de variación de las constantes

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}(s) ds.$$

Además, si $f \equiv 0$, se tiene que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}, V^\beta)$, la clase de funciones analíticas en $t \in \mathbb{R}$ con valores en V^β .

Resultado principal

En la sección anterior demostramos la buena colocación para el caso en que $a \equiv 0$

en (2)-(3). A continuación, enunciaremos y demostraremos el teorema principal del presente trabajo: la buena colocación para el caso general $a > 0$. Para ello, utilizaremos un argumento de punto fijo. A lo largo de los siguientes cálculos, C denotará una constante positiva genérica, cuyo valor puede variar de una línea a otra.

Empezamos escribiendo la solución de (2)-(3) en su forma integral

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t(t) = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) + N \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (17)$$

donde el operador N es definido por

$$N \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a(x)v \end{pmatrix}, \quad (18)$$

y A es el operador compacto definido en (11).

Así, se tiene que la solución de (17) es dada por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-\tau) N \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(\tau) d\tau, \quad (19)$$

donde $(S(t))_{t \geq 0}$ es el grupo de isometrías definido en el Teorema 1.

Entonces, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3. Sea $s \geq 2$. Para cada $(u^0, u^1) \in V^s$, existe $T > 0$ y una única solución (u, v) de (17) en la clase $\mathcal{C}([0, T]; V^s)$.

Si $s = 2$, la solución existe para cada $T > 0$.

Además, la aplicación $\mathcal{F}$ definida del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: V^s &\longrightarrow \mathcal{C}([0, T]; V^s) \\ (u^0, u^1) &\mapsto (u, v) \end{aligned}$$

es Lipschitz y continua.

Demostración. La existencia y unicidad de la solución se establecerá mediante un argumento de punto fijo. Posteriormente, al final de la demostración, mostraremos que $\mathcal{F}$ es Lipschitz continua.

Para aplicar el argumento de punto fijo, para cualquier $(u^0, u^1) \in V^s$, y motivados por (19), introducimos el operador

$$\Gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) := S(t) \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-\tau) N \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(\tau) d\tau.$$

Debemos verificar que Γ es un operador que actúa sobre un espacio de Sobolev adecuado en sí mismo y que es una contracción con una constante estrictamente menor que 1. A continuación, tras una serie de cálculos, definiremos el espacio de Sobolev adecuado y demostraremos que la constante de Lipschitz puede ser elegida tan pequeña como se desee.

En nuestro caso, la fijamos en $1/2$.

Sea $0 < \beta \leq T$, a elegir más adelante. Entonces, para cada $(u^1, v^1), (u^2, v^2) \in \mathcal{C}([0, \beta]; V^s)$, de (4) y (18), deducimos que

$$\begin{aligned} &\left\| N \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \end{pmatrix}(t) - N \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix}(t) \right\|_{V^s} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ a(\cdot)(v^1 - v^2) \end{pmatrix}(t) \right\|_{V^s} \\ &\leq C \left\| \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \end{pmatrix}(t) - \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix}(t) \right\|_{V^s}. \quad (20) \end{aligned}$$

Luego, de (20), obtenemos que

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Gamma \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{C}([0,\beta];V^s)} \\
 &= \sup_{0 \leq t \leq \beta} \left\| \left(\Gamma \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} \right) (t) \right\|_{V^s} \\
 &\leq \int_0^\beta \left\| S(t-\tau) \left(N \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} \right) (\tau) \right\|_{V^s} d\tau \\
 &\leq C\beta \left\| \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{C}([0,\beta];V^s)}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva. Así, eligiendo $\beta > 0$ satisfaciendo $C\beta \leq \frac{1}{2}$, de la estimativa anterior, deducimos que

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{C}([0,\beta];V^s)} \\
 &\leq \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V^s} + \frac{1}{2} \left\| \Gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{C}([0,\beta];V^s)} \\
 &\leq R, \quad (23)
 \end{aligned}$$

lo cual nos permite concluir que

$$\Gamma : B_R(0) \subseteq \mathcal{C}([0, \beta]; V^s) \longrightarrow B_R(0).$$

Así, $\Gamma : B_R(0) \rightarrow B_R(0)$ es es una contracción y, por el Teorema del punto fijo de Banach, obtenemos una única solución $(\eta, w) \in B_R(0)$ que resuelve la solución integral (19) para todo $t \in (0, \beta)$. Desde que la elección de β es independiente de (u^0, u^1) , se tiene que la solución (u, v) pertenece a $\mathcal{C}([0, T]; V^2)$. En efecto, sea u una solución regular de (2). Entonces, multiplicando la ecuación, (2) por u_t , integrando por partes en $(0, 2\pi)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} (|v(t)|^2 + |u_x(t)|^2 + |u_{xx}(t)|^2) dx \\
 &+ \int_0^{2\pi} a(x) |v(t)|^2 dx = 0,
 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
 & \|(u, v)\|_{H_p^2(0, 2\pi) \times L_p^2(0, 2\pi)} \\
 &\leq \|(u_0, u_1)\|_{H_p^2(0, 2\pi) \times L_p^2(0, 2\pi)},
 \end{aligned}$$

Por otro lado, sea

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in B_R(0)$$

donde

$$\begin{aligned}
 & B_R(0) \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{C}([0, \beta]; V^s) : \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{C}([0,\beta];V^s)} \leq R \right\},
 \end{aligned}$$

siendo $R = 2 \left\| \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \right\|_{V^s}$. De (22), obtenemos la siguiente estimativa

para cada $t \geq 0$. La estimativa anterior y un argumento estándar de extensión de la continuidad dan como resultado que la solución (u, v) pertenece a $\mathcal{C}([0, T]; V^2)$.

Por último, para demostrar que la aplicación $\mathcal{F}$ (ver el enunciado del Teorema 3) es Lipschitz continua, seguimos un procedimiento análogo al utilizado en la demostración de (22).

En efecto, para cada $(u^{0,1}, v^{0,1}), (u^{0,2}, v^{0,2}) \in V^s$ si consideramos las soluciones correspondientes (u^1, v^1) y (u^2, v^2) , respectivamente, se deduce que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}(u^{0,1}, v^{0,1}) - \mathcal{F}(u^{0,2}, v^{0,2})\|_{\mathcal{C}([0, T]; V^s)} \\ &= \|(u^1, v^1) - (u^2, v^2)\|_{\mathcal{C}([0, T]; V^s)} \\ &\leq \|(u^{0,1}, v^{0,1}) - (u^{0,2}, v^{0,2})\|_{V^s} \\ &+ \frac{1}{2} \|(u^1, v^1) - (u^2, v^2)\|_{\mathcal{C}([0, T]; V^s)}. \end{aligned}$$

Desde que $(u^1 - u^2, v^1 - v^2)$ también resuelve el problema con datos iniciales $(u^{0,1} - u^{0,2}, v^{0,1} - v^{0,2})$, se tiene que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}(u^{0,1}, v^{0,1}) - \mathcal{F}(u^{0,2}, v^{0,2})\|_{\mathcal{C}([0, T]; V^s)} \\ &\leq 2 \|(u^{0,1}, v^{0,1}) - (u^{0,2}, v^{0,2})\|_{V^s}. \end{aligned} \quad (24)$$

La demostración del teorema está completa.

□

CONCLUSIONES

En este artículo hemos estudiado la ecuación de Boussinesq buena, demostrando la existencia y unicidad de soluciones en espacios de Sobolev periódicos con índice de regularidad s . El enfoque consistió en demostrar primero el resultado en un caso particular más sencillo, cuando s es entero, y, posteriormente, extenderlo al caso general mediante un procedimiento iterativo basado en el método de punto fijo. Para ello, hemos utilizado herramientas fundamentales como la Teoría de Semigrupos, el Análisis de Fourier y estimaciones de energía.

A partir de los resultados obtenidos, surgen diversas direcciones para futuras investigaciones, las cuales podrían abordarse en estudios posteriores e incluso en presentaciones futuras:

- Estudiar un *Principio de Continuación Única* (UCP) para el sistema (9)
- Analizar el comportamiento a largo plazo (long-time behavior) del sistema (2)-(3), en combinación con el Teorema 3.
- Extender los resultados actuales al caso explorando técnicas basadas en espacios de Hilbert y métodos de análisis microlocal.
- Investigar posibles generalizaciones del modelo considerando términos de dispersión más complejos o condiciones de frontera alternativas.

REFERENCIAS

Batchelor, G. K. (1953). *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1002/qj.49707934126>

Bautista, (2023). Bona, J.L. & Sachs, R. L. (1988). *Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation*, Comm. Math. Phys. 118 (1), 15–29. <https://doi.org/10.1007/BF01218475>

Boussinesq, J. (1872). *Théorie des ondes et de remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appl., 17 (2), 55-108. http://www.numdam.org/item/JMPA_1872_2_17__55_0.pdf

Boussinesq, J. (1878). *Essai sur la théorie des eaux courantes*, J. Math. Pures Appl., 4 (3), 335-376. http://www.numdam.org/item/JMPA_1878_3_4__335_0.pdf

Cazenave, T. & Haraux, A. (1998). *An introduction to semilinear Evolution equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13, The Clarendon Press, Oxford. University Press, New York. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198502777.001.0001>

Cerpa, v & Rivas, I. (2018). *On the controllability of the Boussinesq equation in low regularity*, J. Evol. Equ., 18, 1501-1519. <https://doi.org/10.1007/s00028-018-0450-6>

Farah, L.G. & Scialom, M. (2010). *On the periodic "good" Boussinesq equation*, Proc. Amer. Math. Soc., 138 (3), 953–964. <http://www.jstor.org/stable/40590688>

Linares, F. (1993). *Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation*, J. Differential Equations, 106 (2), 257-293. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1993.1108>

Micu, S. & Pazoto, A. F. (2017). *Stabilization of a Boussinesq system with generalized damping*, Systems Control Lett. 105, 62-69. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2017.04.012>

Micu, S., Ortega, J. H., Rosier, L. & Zhang, B.-Y. (2009). *Control and stabilization of a family of*

Boussinesq systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. 24, 273–313. <https://www.aims sciences.org/article/doi/10.3934/dcds.2009.24.273>

Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag: New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>

Scott-Russell, J. (1845). *Report on waves. Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, John Murray, London. https://books.google.com.br/ontcover&hl=es&source=gb_s_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Vallis, G. K. (2017). *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781107588417>

Zakharov, V. E., L'vov, V. S. & Falkovich, G. (1992). *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: wave turbulence*, Springer Series in Nonlinear Dynamics. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-50052-7>